Урок № 41. Тема 5.6. Производная сложной функции.
План.

1. Вывод формулы нахождения производной сложной функции.
2. Решение примеров.

Рассмотрим функцию

тогда

Возьмем еще функцию $y=\sqrt{\tilde{o}^5+3}$

Обозначим $\tilde{o}^5+3=u,$ тогда $y=\sqrt{u}$ - сложная функция

Пусть $y=f(u)$ $u=\varphi(x)$

Производная данной функции находится по формуле:

$$y' = f'(u)\cdot\varphi'(x) = f'(u)\cdot u'x$$

Рассмотрим сложную степенную функцию

$y=u^m$ $u=\varphi(x)$

$(u^m)'_x = 2y'_u\cdot u'x = (u\, m/n' \cdot u'x = m\cdot u^{m-1}\cdot u'x$ $(\sqrt{u})x=\dfrac{u'x}{2\sqrt{u}}$

Рассмотрим

1) $y=(5x^3-4)^4=u^4$ $u=5x^3-4$

$(u^4)'x=4u^3\cdot u'x=4(5x^3-4)^3(5x^3-4)' = 4(5x^3-4)^3\cdot 15x^2=60x^2(5x^3-4)^3$

2) $y=(2x^8-3)^6$ $[(2x^8-3)^5]' = 5(2x^8-2)^4(2x^8-3)' = 5(2x^8-3)^4\cdot 16x^7 = 80x^7(2x^8-3)^4$

u

Решить :

1) $y=(5x^2-1)^4$ 2) $y=\dfrac{3}{(3x^3+4)^5}$ 3) $y=\dfrac{(6x^6+4)^5}{5}$

4) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$ 5) $y=\sqrt{7x^8+3x+2}$ 6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x-1}}$

7) $y=\dfrac{3x^2}{(5x-1)^3}$

Домашнее задание

1) $y=(x^3-4x+1)^3$ $y' = 3(x2-4x+1)^2(3x^2-4)$

2) $y=\sqrt{2x^2-3x+4}$ $y' = \dfrac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+4}}$

3) $y=\sqrt{x^2+1}$ $y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

4) $y=\dfrac{(2\varphi-1)^2}{\varphi^2}$ $y' = \dfrac{2(4\varphi^4-1)}{\varphi^3}$

5) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$ $y' = \dfrac{x-2}{\sqrt{(x-1)^2}}$

6) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ $y' = \dfrac{x^2-2ч}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}}$

Урок 43. Тема 5.7. Производная степенной функции с натуральным показателем. Производная синуса и косинуса.
План.

1. Производная степенной функции с натуральным показателем.

2. Производная тригонометрических функций.

Вывести формулы производных
y=C, y=x,…y=x^n n – любое рациональное.

Найти производные функций

1) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=\sqrt[6]{\tilde{o}^5}$ 3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{\tilde{o}^3}}$ 4) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}$ 5)

6) $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$ 7) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt{x}}$

Найти производные функций

1) $y=\sqrt[7]{\tilde{o}^3}$ $\left(\dfrac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}\right)$ 2) $y=\sqrt[8]{x^7}$ $\left(\dfrac{7}{8\sqrt[8]{\tilde{o}}}\right)$

3) $y=\dfrac{1}{x^9}$ $\left(-\dfrac{9}{\tilde{o}^{10}}\right)$ 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[8]{x^9}}$ $\left(-\dfrac{9}{8\sqrt[8]{\tilde{o}^{17}}}\right)$

5) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{5}{12\sqrt[12]{\tilde{o}^7}}\right)$ 6) $y=\sqrt[4]{x^5\sqrt[5]{x^2}}$ $\left(\dfrac{7}{20\sqrt[20]{\tilde{o}^{13}}}\right)$

7) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x^5}\sqrt[3]{x}}$ $\left(\dfrac{5}{6\sqrt[6]{\tilde{o}}}\right)$

Определение производной, последовательность нахождения ее.

Найти $(\sin x)^/$

1) $\acute{o}+\Delta\acute{o}=f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$

2) $\Delta\acute{o}=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x-\dfrac{\Delta x}{2})$

3) $\dfrac{\Delta\acute{o}}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot cjs(x+\dfrac{\Delta x}{2})}{\dfrac{\Delta x}{2}}$

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \frac{\Delta x}{2}\to 0}}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})=1\cdot\cos x$

$(\sin x)^/=\cos x$ $(\sin u)^/x=\cos u\cdot u^/x$

$f(x)=\cos x$

$(\cos x)^/=\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-k\right)\right]^/=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^/=\pi nx$

$\boxed{(\cos x)^/-\sin x(\cos u)^/x=-\sin u\cdot u^/x}$

$\boxed{(tgx)^{/} = \dfrac{1}{\cos^2 x};}$ $\boxed{(tgu)^{/} x = \dfrac{u^{/} x}{\cos un}}$

$\boxed{(ctgx)^{/} = -\dfrac{1}{\sin^2 x};}$ $\boxed{(ctgu)^{/} x = -\dfrac{u^{/} x}{\sin^2 u};}$

Решение упражнений:

Найти у$^{/}$, если:

1. $\sin 10x$	7. $tg 5x$	13. $\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$
2. $\sin 3x$	8. $tgmx$	14. $\sqrt{1+\cos 8x}$
3. $\cos 20x$	9. $ctgmx$	15. $\cos 6x \cdot \sin 5x$
4. $\cos \dfrac{x}{2}$	10. $tg 4\sqrt{x}$	16. $\sqrt[5]{tg 5x+2}$
5. $\sin mx$	11. $\sin^3 5x$	
6. $\cos mx$	12. $y = x \cdot \cos 6x$	

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется степенной?
2. По какой формуле находится производная степенной функции?
3. Какие тригонометрические функции вы знаете?
4. По какой формуле находится производная синуса и косинуса?
5. Нахождение производной называется?

Урок № 44. Тема 5.8. Производная показательной функции.

План.

1. **Формулы нахождения производных показательной функции.**
2. **Решение упражнений.**

$y = \ell^{u}$ $\quad u = \varphi(x)$

$\boxed{(\ell^{u})^{/} = \ell^{u} \cdot u^{/} x}$ $\boxed{(\ell^{x})^{/} = \ell^{x}}$

$y = a^{u}$

$\boxed{(a^{u})^{/} = a^{u} \cdot \ell ua \cdot u^{/} x}$ $\boxed{(a^{x})^{/} = a^{x} \cdot \ell ua}$

Найти производные функций

1) $y = \ell^{\sin x}$	5) $y = \ell^{x \cdot \sin 2x}$	8) $y = \sqrt{\sin \ell^{x}}$
2) $y = \ell^{tg 2x}$	6) $y = \ell n \dfrac{1+2x^{tg 2x}}{\ell^{x}}$	9) $y = \ell u \cdot \ell^{\sin x}$
3) $y = \dfrac{\ell^{x}-1}{\ell^{x}+1}$	7) $y = \ell n \cdot \ell^{\sin t}$	
4) $y = x^{3} \cdot \ell^{5x}$		

Домашнее задание

Найти у$^{/}$, если:

1) $y = \dfrac{\ell^{x}-1}{\ell^{x}}$ $\quad (\ell^{-x})$

2) $y = x \cdot \ell^{2x}$ $\quad (\ell^{2x}(1+2x))$

3) $y=\ell^{x\cdot\ell nx}$ $(\ell^{x\cdot\ell n}(1+\ell nx)$

4) $y=\ell^{x\cdot\ell nx}$ $(\dfrac{1}{1+\ell^{x}})$

5) $y=\ell^{\cos t}$ $(-\sin t)$

6) $y=\sqrt{\cos}\ell^{x}$ $(-\dfrac{1}{2}\ell^{x}\cdot tg\ell^{x}\sqrt{\cos\ell^{x}})$

7) $y=\ell^{\cos x}\cdot\sin x$ $(\ell^{\cos x}(\cos x-\sin^{2}-x)$

8) $y=7^{\sqrt{1+\ell^{x}}}$ $(7^{\sqrt{1+\ell x}}\dfrac{\ell^{x}\cdot\ell n7}{2\sqrt{1+\ell^{x}}})$

Урок № 45 .Тема 5.9. Производная логарифмических функций.
План.

1. Повторение определение логарифма, свойств.
2. Формулы нахождения производной логарифма.
3. Решение упражнений.

Рассмотрим предел вычисления $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ при n→∞. Предел $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ при n→∞ равный приближенно 2,718, принято обозначать буквой ℓ и это записывается

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\ell\approx 2{,}718$$

Определение: Логарифмы по основанию ℓ называются **натуральными.**
Натуральный логарифм числа N обозначается ℓnN. Между десятичным и натуральным логарифмами числа N существуют зависимости:

$\boxed{\ell nN=\lg N\cdot 2.303}$ $\boxed{\ell gN=\ell nN\cdot 0.4343}$

Рассмотрим формулы дифференцирования логарифмических функций
$y=\ell nU$ $U=f(x)$

$\boxed{(\ell nU)'_{x}=\dfrac{U'_{x}}{U}}$ $\boxed{(\ell nx)'=\dfrac{1}{x}}$ $y=\lg U$

$\boxed{(\lg U)'_{x}=\dfrac{0.4343U'_{x}}{U};}$ $\boxed{(\lg x)'=\dfrac{0.4343}{x}}$

Решить примеры:

1) $y=\ell n(2x+1)$ 2) $y=\ell g(x^{2}+1)$

3) $y=\ell n\dfrac{x^{3}+1}{x-1}$ 4) $y=\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ $\left(\dfrac{2}{1-4x^{2}}\right)$

5) $y=\ell n\cos(1-x)$ 6) $y=\ell n^{3}\sin x$ 7) $y=x^{3}\cdot\ell nx$

Домашнее задание
Найти y', если:

1) $y = 2\ell g(x+1)$ $\left(\frac{0.8686}{x+1}\right)$

2) $y = f(t) = \ell n(t^2+1)$ $\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)$

3) $y = 10\ell n\frac{4}{4+t}$ $\left(-\frac{10}{4+t}\right)$

4) $y = \ell n^2 x$ $\left(\frac{2\ell nx}{x}\right)$

5) $y = \ell n \cdot \cos^2(1-x)$ $\left(2tg(1-t)\right)$

6) $y = \ell n\frac{a+x}{a-x}$ $\left(\frac{2a}{a^2-x^2}\right)$

7) $y = x \cdot \ell nx$ $(1+\ell nx)$

8) $y = \ell n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется логарифмической функцией?
2. Какими свойствами обладает логарифмическая функция?
3. По какой формуле находится производная логарифмической функции?
4. По какой формуле находится производная натурального логарифма?
5. По какой формуле находится производная десятичного логарифма?

Урок № 46 (2) Тема 5.10. Производные обратных тригонометрических функций.
План.

1. Формулы нахождения производных обратно тригонометрических функций.
2. Решение упражнений

Формулы нахождения производных обратно тригонометрических функций.

$(\arcsin u)' x = \frac{u' x}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arcsin u)' x = -\frac{u' x}{\sqrt{1-u^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgu)' x = -\frac{u' x}{1+u^2}$ $(arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgu)' x = -\frac{u' x}{1+u^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Решить упражнения:

1) $y = \arcsin 8x$

2) $y = \arccos t^3$

3) $f(t) = arctg\sqrt{t}$

4) $\varphi = (\arccos t)^3$

5) $y = \arcsin\frac{2x}{5}$

6) $y = \ell^{\arcsin 4x}$

7) $y = \ell n\ell^{arctg4x^2}$

8) $y = \sqrt{\arcsin \ell^{3x}}$

9) $y = arctg\ell^{\sin 4x}$

Домашнее задание

а) Повторить все формулы дифференцирования.

б) Найти $y^{/}$, если:

1) $y = \arccos\frac{x}{2}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)$

2) $y = \arcsin\sqrt{x}$ $\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\right)$

3) $y = (\arcsin x)^2$ $\left(\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

4) $S = arctg\ell^t$ $\left(\frac{\ell^t}{1+\ell^{2t}}\right)$

5) $y = \arcsin\sqrt{\ell^x}$ $\left(\frac{\sqrt{\ell x}}{2\sqrt{1-\ell^x}}\right)$

6) $y = \ell n arctg\frac{x}{2}$ $\left(\frac{2}{(4+x^2\cdot arctg\frac{x}{2}}\right)$

7) $y = \ell n^{\arcsin\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

Урок № 48. Тема 5.11. Вторая производная и ее физический смысл.
План.
1.Определение второй производной функции.
2. Механический смысл производной II порядка.
Рассмотрим функцию $y = 5x^3 - 2x$

$y^{/} = (5x^3 - 2x)^{/} = 10x^2 - 2$ - I производная или производная нового порядка

$(y^{/})^{/} = y^{/} = (10x^2 - 2)^{/} = 20x$ - II производная или производная второго порядка

$(y^{//})^{/} = y^{///} = 20$ - III производная или производная третьего порядка

Определение: Производная от первой производной, если она существует, называется второй производной или производной II порядка**.**

Определение: Производная от второй производной, если она существует, называется третьей производной или производной III порядка.

Производная n порядка обозначается $y^{(n)}$

Механический смысл производной II порядка.

Пусть тело движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Скорость тела в данный момент времени t определяется как производная пути по времени $V = S^{/}$.

Если тело движется неравномерно, то скорость V с течением времени изменяется и за промежуток времени Δt получает приращение ΔV. В этом случае отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ называется **средним ускорением** в промежутке времени от t до t+Δt.

Положим, что Δt→0, тогда t+Δt→t а среднее ускорение стремится к величине, которая называется **ускорением в данный момент времени t** и обозначается j.

$$j = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = V^{/} = (S^{/})^{/} = S^{//}$$

Определение: Ускорением прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента времени.

Таков механический смысл второй производной.

Задача. Точка движения по закону (прямолинейно)

$S = 3t^3 - 2t^2 + 3t + 5$ Найти V и j в момент t=5.

$V = S^{/} = (3t^3 - 2t^2 + 3t + 5)^{/} = 9t^2 - 2t + 3$

$V_{t=5} = 9 \cdot 25 - 4 \cdot 5 + 3 = 225 - 20 + 3 = 208$

$j = S^{//} = (9t^2 - 2t + 3)^{/} = 18t - 2$

$j_{t=5} = 18 \cdot 5 - 4 = 90 - 4 = 86$

Домашнее задание:

Найти вторые производные функций

1) $y = 3t^2 + 2t - 1$ (6)

2) $y = \dfrac{2t-2}{t}$ $\left(-\dfrac{2}{t^3}\right)$

3) $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x$ $(-2\cos 2x)$

4) $f(t) = \ell^{\sin t}$ $(\ell^{\sin t}(\cos^2 t - \sin t))$

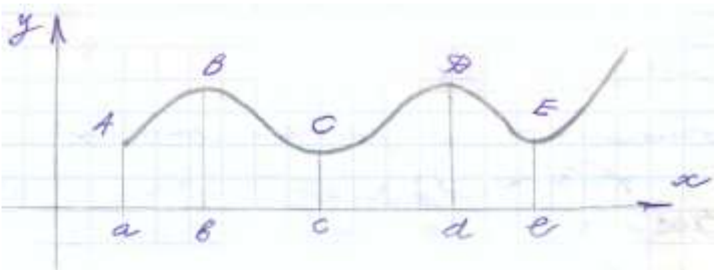
5) $S = \ell n \dfrac{2}{2+t}$ $\left(\dfrac{2}{(2+t)^2}\right)$

Урок № 49. Тема 5.12. Признаки возрастания, убывания функций.

План.

1. Признаки возрастания и убывания функции.
2. Алгоритм определения промежутков возрастания и убывания функции.

Рассмотрим функцию $\acute{o} = f(x)$, построим ее график



В промежутках (α;в), (c;d) функция возрастает, в промежутках (в;c), (d;e) функция убывает.

Признаки возрастания и убывания функции

Теорема. Если производная функции $\acute{o} = f(x)$ в данном промежутке значений x положительна, то функция возрастает в этом промежутке, если производная отрицательна, то функция убывает.

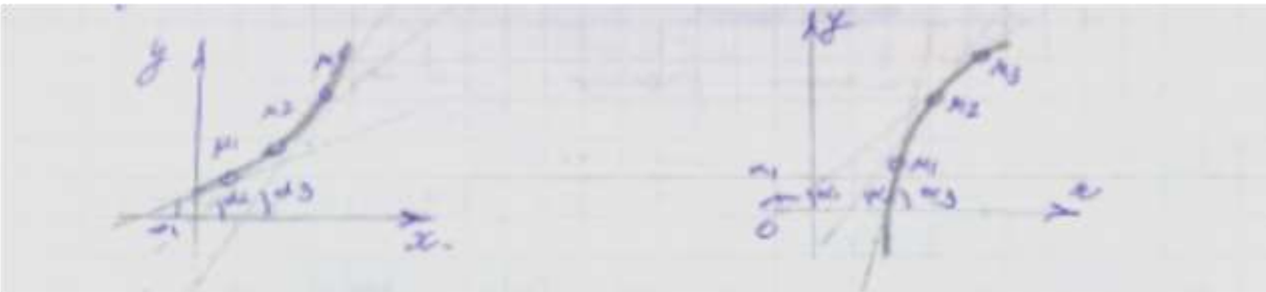
Поясним данную теорему геометрически.

I Пусть в данном промежутке значений x

$f^{/}(x) > 0$ (1)

то $f^{/}(x) = \hat{e} = tg\alpha$ (2)

где к – угловой коэффициент касательной проведенной к графику функции $\acute{o} = f(x)$, α – угол наклона этой касательной к положительно направлению оси ох из равенства (2) следует, что если $f^{/}(x) > 0$ то $tg\alpha > 0$, откуда α – острый угол. Отсюда получаем следующий график функции



По чертежам видно график направлен вверх и функция **возрастает**.

II Предположим, что в данном промежутке

$$f^{/}(x) < 0 \qquad (3)$$

тогда $tg\alpha < 0$ и α – тупой угол

Получим

По чертежам видно что касательные образуют тупые углы с положительным направлением ох и график направлен вниз и функция **убывает**.

Найти промежутки возрастания, убывания функции

1) Найти область определения функции.

2) Вычислить производную функции.

3) Решить неравенство $f^{/}(x) > 0$ или $f^{/}(x) < 0$.

4) Используя утверждение теоремы найти промежутки возрастания или убывания функции.

Найти промежутки возрастания и убывания функций

1. $f(x) = \frac{1}{3}\tilde{o}^3 - 4\tilde{o} + 2$

1) D(f)=(-∞;∞)

2) $f^{/}(x) = (\frac{1}{3}\tilde{o}^3 - 4\tilde{o} + 2)^{/} = \tilde{o}^2 - 4$

3) $f^{/}(x) > 0$ $\qquad x^2 - 4 > 0$ $\qquad x^2 - 4 > 0$ $\qquad x_{1.2} = \pm 2$

4) Функция на промежутках (-∞; -2] и (2; ∞] – на промежутке [-2; 2] возрастает

[-2; 2] убывает

2. $\acute{o} = \frac{1}{3}\tilde{o}^3 - \frac{1}{2}\tilde{o}^2 - 12\tilde{o} - 5$

Ответ: (-∞; -3] и (4; ∞] - возрастает

(-3; 4] убывает

Домашнее задание:

Найти промежутки возрастания, убывания функций

1) $\acute{o}=2\tilde{o}^3-3\tilde{o}^2-12\tilde{o}-1$

Ответ: (-∞; -1] и (2; ∞] - возрастает

[-1; 2] убывает

2) $\acute{o}=\frac{1}{3}\tilde{o}^3-\frac{1}{2}\tilde{o}^2$

Ответ: (-∞; 0] и (2; +∞] - возрастает

[0; 1] убывает

Контрольные вопросы:

1. Дать определение возрастающей, убюывающей функции.
2. Сформулировать условия убывания, возрастания функции.
3. Сформулировать правила нахождения интервалов монотонности.
4. Какими точками отделяются промежутки возрастания от промежутков убывания.
5. Определить интервалы возрастания, убывания функции

$$f(x)=\frac{1}{3}\tilde{o}^3-2x$$

Урок № 50 Тема 5.12. Экстремум функций. Исследование функций на экстремум по первой производной.

План.

1. **Определение максимума**
2. **Определение минимума.**
3. **Признаки максимума и минимума.**

Те значения аргумента, при которых значения функции являются наибольшими или наименьшими называются **точками максимума или минимума**.

Значения функции при этих значениях аргумента – **максимумом или минимумом**. Максимумы, минимумы функции называются экстремумами функции.

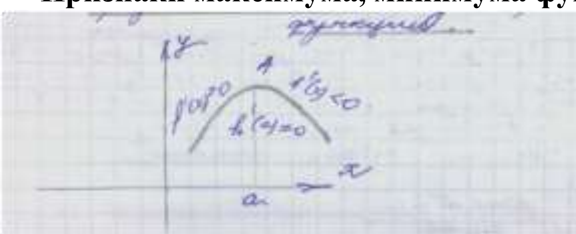
Точки максимума, минимума функции называются **критическими точками**.

Точка максимума – граница перехода от возрастания к убыванию, точка минимума – граница от убывания функции к возрастанию.

Определение 1. Функция $\acute{o}=f(x)$ имеет максимум при x=*a*, если при всех x, достаточно близких к x=*a*, если при всех x, достаточно близких к a выполняется неравенство $f(\grave{a})>f(x)$.

Определение 2. Функции $\acute{o}=f(x)$ имеет минимум при x=*a*, если при всех x, достаточно близких к *a* выполняется неравенство $f(\grave{a})<f(x)$

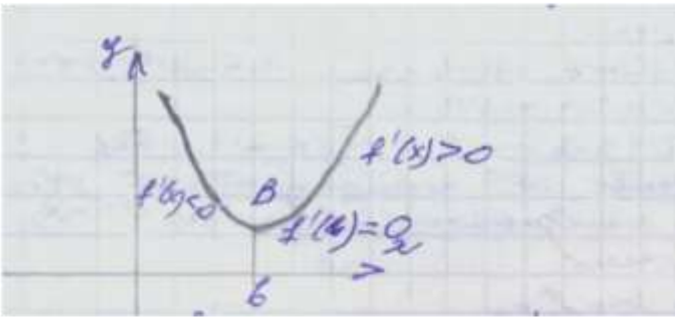
Признаки максимума, минимума функции



Определение. Если функция $\acute{o}=f(x)$ при x=*a* имеет максимум, то:

1) $f^{/}(a)=0$

2) $f^{/}(x)$ при переходе аргумента через х=*а* меняет знак с «+» на «-»



Определение. Если функция $\acute{o}=f(x)$ при х=в имеет минимум, то:

1) $f^{/}(\hat{a})=0$

2) $f^{/}(x)$ при переходе аргумента через х=*в* меняет знак с «-» на «+»

Правило исследования функции на экстремум по I производной.

1. Находим $f^{/}(x)$.
2. Решаем уравнение $f^{/}(x)=0$ находим x_1; x_2; x_3 … Располагаем в порядке возрастания.
3. Определяем знаки $f^{/}(x)$ при $x<x_1$, затем при $x_1<x<x_2$ и т.д.
4. Находим $y_{макс}$, $y_{мин}$.

Примеры

1. $\acute{o}=\frac{1}{3}\tilde{o}^3-\frac{3}{2}\tilde{o}^2-4\tilde{o}+6$

I $\acute{o}^{/}=\tilde{o}^2-3\tilde{o}-4$

II $\tilde{o}^2-3\tilde{o}-4=0$ $\qquad$ $\tilde{o}_1=-1$ $\qquad$ $\tilde{o}_2=4$

III Составим таблицу.

x	(-∞;-1]	x= -1	[-1;4]	x=4	[4;∞)
$f^{/}(x)$	+	0	-	0	+
f(x)	↗	$\frac{\max}{8\frac{1}{6}}$	↘	$\frac{\min}{-12\frac{2}{3}}$	↗

-1 $\qquad$ 4

Строим точки $\grave{A}(-1;\frac{1}{6})$ - max

$\hat{A}(4;12\frac{2}{3})$

Решить в аудитории:

2. $\acute{o}=\frac{1}{3}\tilde{o}^3-2\tilde{o}^2+3\tilde{o}-1$ $\qquad$ $\grave{A}(1;\frac{1}{3})$ - max

$\frac{1}{3}-2+3-1$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\cdot27-2\cdot9+9-1$ $\qquad$ $\hat{A}(3;-1)$ - min

Домашнее задание

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 7$

$$\frac{8}{3} - \frac{5 \cdot 4}{2} + 12 - 7 = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 7 = \frac{8}{3} - 5 = \frac{8-15}{3} = -\frac{7}{3}$$

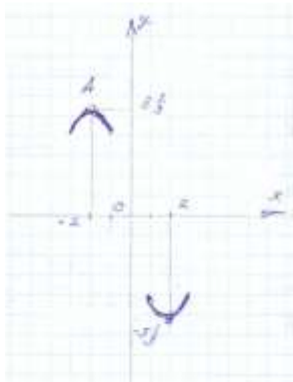
$\grave{A}(2; -\frac{7}{3})$ - max

$\hat{A}(3; -\frac{5}{2})$ - min

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

$\grave{A}(-2; 5\frac{1}{3})$ - max

$\hat{A}(2; -5\frac{1}{3})$ - min

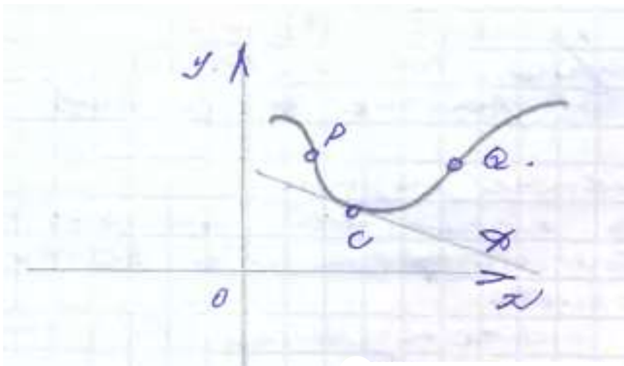


Урок № 51. Тема 5. 14. Выпуклость, вогнутость графика. Точка перегиба.

План.

1. **Выпуклость графика.**
2. **Вогнутость графика.**
3. **Точка перегиба.**
4. **Признаки выпуклости и вогнутости кривой**

Рассмотрим кривую, являющуюся графиком некоторой функции

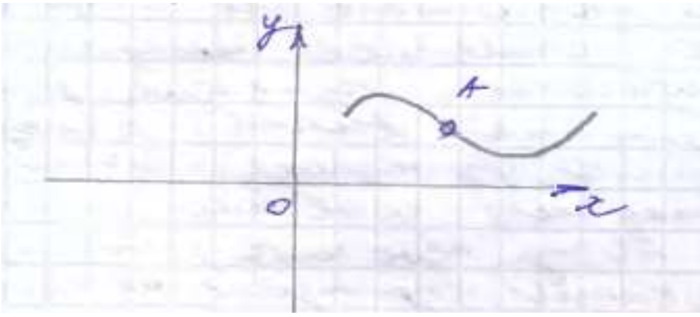


Проведя касательную AB, мы видим, что точки кривой, смежные с точкой касания и лежащие по обе стороны от нее располагаются ниже касательной. В таком случае говорят, что кривая **выпукла в точке A**

.

Рассмотрим следующую кривую.

Здесь мы наблюдаем другое явление, а именно: точки кривой, близкие к точке касания C и расположенные по разным сторонам от нее лежат выше касательной СД. В этом случае говорят, что кривая в точке C **вогнута** и часть кривой между точками P и Q удовлетворяющую этому условию называют **вогнутой**.



Рассмотрим еще кривую. Здесь в точке А происходит переход от выпуклой части кривой к вогнутой. Точка **Є называется точкой перегиба.**

Признаки выпуклости и вогнутости кривой

Теорема. Если вторая производная функции $\acute{o} = f(x)$ в данном промежутке значения **x** положительна то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательная, то выпукла.

Пример. Узнать выпукла или вогнута кривая $\acute{o} = \tilde{o}^2$ в точке, абсцисса которой равна -2

$$y^{/} = (x^2)^1 = 3x^2$$

$$y^{//} = (3x^2)^1 = 6x$$

$$\acute{o}^{//}_{\tilde{o}=-2} = 6(-2) = -12$$

Вывод кривая выпукла в точке, абсцисса которой равна x = -2

Нахождение точки перегиба

Определение. Точкой перегиба кривой называется точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой.

Правило. Чтобы найти точку перегиба кривой $\acute{o} = f(x)$ нужно:

1) Отыскать вторую производную функции $\acute{o} = f(x)$.

2) Приравняв ее к нулю решить полученное уравнение, пусть действительные корни будут $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$**…**

3) Расположить значения $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$**…** в порядке возрастания подставить во вторую производную сначала любое число меньшее $\mathbf{x_1}$, затем любое число большее $\mathbf{x_1}$ но меньшее $\mathbf{x_2}$ и т.д.

Если при этом произойдет смена закона (независимо с «+» на «-« или наоборот, то соответствующее значение **x** будет точкой перегиба.

4) Найти ординаты точек, для чего подставляем найденные значения **x** в **первоначальную** функции.

Примеры.

I $\acute{o} = x^3$. Найти точку перегиба.

1) $\acute{o}^{/} = 3\tilde{o}^2$ 2) $\acute{o}^{//} = 6\tilde{o}$ 3) 6x=0 x=0

$\acute{o}^{//}_{\tilde{o}<0} = 6 - 1 = -6$ −

x= -1

$\acute{o}^{//}_{\tilde{o}>0} = 6 \cdot 1 = 6$ +

x=1

Вывод. При x=O имеет место точка перегиба.

Ответ. Точка O (0;0) точка перегиба.

II $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Ответ. Точка перегиба С (1;-1)

Домашнее задание.

Исследовать на перегиб функции

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ (0; 0)

2) $y = x^3 + 3x^2 - 6x - 6$ (-1; 2)

3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ $\left(\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}\right)$

Исследовать на экстремум по I производной

4) Исследовать на экстремум по I производной и точку перегиба

$y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$

Ответ. $\grave{A}\left(0; \frac{2}{3}\right)$ $\hat{A}\left(4; 4\frac{2}{3}\right)$ $\tilde{N}(2; -2)$

Урок 54.Тема 5.16. Наибольшее, наименьшее значения функции на промежутке. Задачи на максимум, минимум функции.

План.

1.Наибольшее, наименьшее значения функции на промежутке.

2.Задачи на максимум, минимум функции.

На прошлом занятии мы научились находить экстремумы-минимумы и максимумы функции. На этом занятии надо рассмотреть применение производной для нахождения наибольших и наименьших величин.

Во многих математических моделях, описывающих реальные ситуации, исследуется поведение функции на заданном отрезке. В частности нередко возникает задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Пусть дана функция на данном отрезке. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Функция достигает на отрезке и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.

Теорема 2. Наибольшего и наименьшего значений функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри его.

Теорема 3. Если наибольшее (или наименьшее)значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

1. Найти производную функции.
2. Найти критические точки, расположенные внутри отрезка.
3. Вычислить значения функции в критических токах, а также на концах отрезка.
4. Выбрать из этих значений наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 - x^2$ на отрезке xЄ[-1; 1]

Решение:

1) $f^{/}(x) = 6x^2 - 2x$

2) $f^{/}(x) = 0$

$6x^2 - 2x = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{1}{3}$

3) Определим принадлежность критических точек данному отрезку

$O \in [-1;1]$ $\frac{1}{3} \in [-1;1]$

4) Вычислить значение функции в точках

$x=0$; $\frac{1}{3}$; -1; 1

$f(0)=0$ $f(\frac{1}{3})=2\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{27}$

$f(1)=1$ $f(-1)=-3$

Наименьшее значение $f(-1)=-3$

Наибольшее значение $f(1)=1$

Пример 2. $f(x)=2x^3+9x^2-24x+1$ [-2; 1]

2) $y=x^3+3x^2$ A(-2; 4) B(0; 0) C(-1;2)

Решить задачи.

1. Разбить число 20 на 2 слагаемых, произведение которых имело наибольшее значение. (10; 10)
2. Разбить число 10 на слагаемые, чтобы сумма их квадратов была наименьшая. (5; 5)

Домашнее задание

Построить график функции

1) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-4$ $\grave{A}(3;5)$ $\hat{A}\left(-1;\frac{2}{3}\right)$

2) $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$ $\grave{A}\left(-1;3\frac{1}{3}\right)$ $\hat{A}\left(2;-5\frac{2}{3}\right)$

Задача: Разбить тело 30 на 2 слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшая (15; 15)

Урок № 54. Тема 5. 17. Тема: Дифференциал функции и его геометрический смысл. Применения дифференциала в приближенных вычислениях.

План занятия.

1.Дифференциал функции и его геометрический смысл.

2. Применения дифференциала в приближенных вычислениях.

а) понятие бесконечно малой величины.

б) понятие дифференциала функции. Дана функция $\acute{o}=f(x)$

Ее производная $\acute{o}^{/}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}-y^{/}$ неограниченно убывает (→0) при Δx→0 т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}-y^{/}=\alpha$ α – б.н.в.

или $\frac{\Delta y}{\Delta x}-y^{/}+\alpha$, т.е. $\Delta\acute{o}=\acute{o}^{/}\Delta\tilde{o}+\alpha\cdot\Delta\tilde{o}$

$\alpha\Delta\tilde{o}$ при Δx→0 стремится к 0 быстрее, чем $y^{/}\Delta x$ называют **главной частью** приращения функции $\acute{o}=f(x)$.

Определение. Главная часть $y^{/}\Delta x$ приращение функции $\acute{o}=f(x)$ называется дифференциалом функции.

Δx примем $\alpha y=y^{/}\Delta x$

$\alpha y=y^{/}\Delta x$

Определение. Дифференциал функции равен произведению функции на дифференциал аргумента.

Решить в аудитории.

Найти ***а*у** функции

1) $y = x^3\sqrt{x}$ 2) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 3) $3 = \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{1}{t^2}$

4) $y = \cos^3\sqrt{x}$ 5) $\acute{o} = (\arccos 3x)^2$

Контрольные вопросы:

1. Что называется дифференциалом функции?
2. Какая величина называется бесконечно малой величиной?
3. Какие свойства приращения функции отражены в понятии дифференциала?
4. Приведите примеры записи связи между физическими величинами в дифференциалах.
5. С помощью какой замены можно получать приближенные формулы?

Домашнее задание.

Найти дифференциалы функций

1) $y = x\sqrt{x}$ $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}dx$

2) $y = \dfrac{1-t}{1+t}$ $-\dfrac{2dt}{(1+t)^2}$

3) $3 = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{10}$ $\dfrac{1}{w^2}\sin\dfrac{2}{10}dw$

4) $\acute{o} = \sin^2\sqrt{\tilde{o}}$ $\dfrac{\sin^2\sqrt{\tilde{o}}}{2\sqrt{x}}dx$

5) $\acute{o} = \ell n\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ $-\dfrac{dx}{2x}$

6) $\acute{o} = arctg\,\dfrac{x}{1+x}$ $\dfrac{dx}{1+2x^2}$

Урок № 55. Тема 5.18. Решение задач.

План.

1. Решение упражнений.
2. Контрольная работа.
3. Домашняя работа.
   1. Вопросы:

- С помощью какой функции описывается закон равномерного движения?
- С помощью какой функции описывается закон равноускоренного движения?
-какова схема вычисления производной?
-Чему равна производная суммы, произведения, частного?
-что происходит с производной при умножении функции на некоторую постоянную?
-Чему равна производная степенной функции?
-сформулируйте признак постоянства функции
-сформулируйте признак монотонности функции
-сформулируйте необходимое условие экстремума
Сформулируйте достаточное условие экстремума.

Каков алгоритм нахождения промежутков монотонности и точек экстремума?

2. Решение упражнений.

А)Найдите производную функции:

1. $y = x^7 - 4\sqrt{x}$
2. $y = xtgx$
3. $y = ctg\frac{x}{3}$
4. $y = \sin x^2$
5. $y = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^8}$
6. $y = tg\ 3x$
7. $y = \sqrt{x}cosx$
8. $y = sin^2x$
9. $y = (\cos 3x + 6)^3$
10. $y = \frac{3x^2+4}{2x-1} + 6\cos \pi x$

Б)Найдите производную функции:

1. $y = ctg2x$
2. $y = \sqrt{x}\sin x$
3. $y = cox^2x$
4. $y = (\sin 2x - 5)^3$
5. $y = \frac{2x^2-3}{4x+3} + 8\sin 0.5\,\pi x$
6. $y = x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 3$
7. $y = (3 - 2x)\sqrt{x}$
8. $y = sin2x$
9. $y = tg\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$
10. $y = (2x - 1)^{17}$
11. $y = x^7 - 2x^5 + 3x - 3$

В)Найдите производную функции:

1. $y = sin^2 3x$
2. y=sin$\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
4. $y = x^3 - 2x^2 + x + 10$
5. $y = \frac{1}{3}x^3 - 1.5x^2 - 4x$
6. $y = \frac{2x+7}{x-4}$
7. $y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}$
8. $y = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 1$
9. $y = (x - 1)\sqrt{x}$
10. $y = (3x^2 - 2)(3x^2 + 2)$
11. $y = \cos 3xcos\ x - sin3xsin\ x$

3. **Контрольная работа.**
4. **Домашняя работа.**

Исследуйте на экстремум следующие функции:

1) $y=3-x^2$; 2) $y=x^2+4x$;
3) $y=1-x-x^2$; 4) $y=2x^2-x+5$;
5) $y=12x-x^3$; 6) $y=x^3-6x^2$;
7) $y=\frac{x^3}{3}+x^2-4x+5$; 8) $y=2x^3-9x^2-60x+1$;
9) $y=x^4-x^2$; 10) $y=x^4+2x^2+1$;
11) $y=x^4-x^3$; 12) $y=(x+1)^3-27(x+1)$;
13) $y=x+\frac{1}{x}$; 14) $y=\frac{x}{x^2+5}$;
15) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; 16) $y=x\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

Раздел VI. Прямые и плоскости в пространстве.

Урок № 56. Тема 6.1. Аксиомы стереометрии и следствия из них.

План занятия.

Курс геометрии состоит из планиметрии и сереометрии. Объектами изучения в планиметрии являются фигуры, лежащие в одной и той же плдоскости, например, угол, треугольник, окружность. Поэтому такие фигуры называются плоскими.

В стереометрии изучают фигуры , содержащиеся в пространстве. Среди них имеются неплоские фигуры, например куб, пирамида, цилиндр.

Пространство также содержит все плоские фигуры, поэтому сведения из планимерии понадобятся и в стереометрии.

Изучение стереометрии имеет большое значение для подготовки к практической деятельности. Мы живем и трудимся в трехмерном мире, поэтому усвоение сведений о геометрических фигурах пространства позволяет глубже, полнее осознать свойства реальных предметов, которые создаются природой и людьми.

Курс геометрии основан на определенной системе аксиом.

Аксиомы и следствия из них отражают существенные свойства реального пространства.

C_1. Какова ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

C_2. Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

C_3. Если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

C_4. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Построение следствия аксиом.

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.

Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

Дать символические обозначения. (построить график)

$A \in a$; $A \notin a$

α, β, γ - плоскости

$a \subset \alpha$ $a \not\subset \alpha$

ахв=М   аηв=М
аCхα=М
аηα=М   αηβ=ℓ |АВ|

Задачи

1. Точки М, N, К лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
2. Докажите, что через одну прямую можно провести две различные плоскости.
3. Даны две не пересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая пересекающая одну из плоскостей пересекает и другую.
4. Дано А, α, $A \not\subset \alpha$. Докажите что все прямые пересекающие прямую и проходящие через точку А, лежат в одной плоскости.
5. Отрезки АВ и АС пересекают плоскость α. Пересечет ли ее отрезок ВС?, прямая ВС?

Домашнее задание.

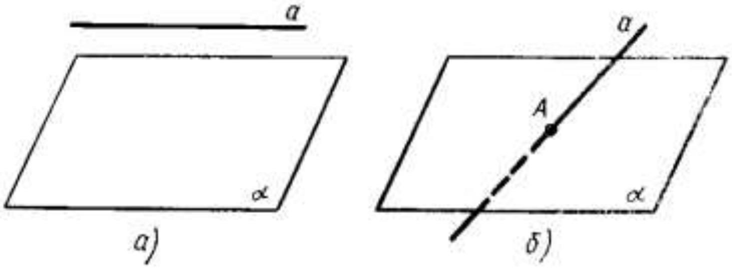
Выучить содержание конспекта.

<u>Урок № 57. Тема 6.2.: Параллельность прямых. Параллельность прямой и плоскости.</u>

1) Рассказать о взаимном расположении двух прямых в пространстве: пересекающиеся, параллельные, скрещивающиеся. Обратить внимание на определение угла между скрещивающимися прямыми.
2) Рассказать о взаимном расположении прямой и плоскости: пересекаются, параллельные, совпадающие.

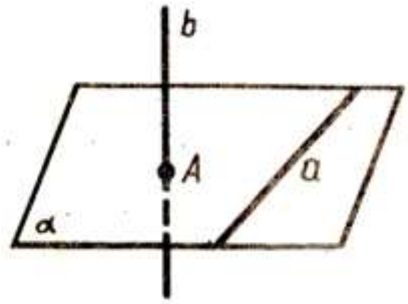
Доказать признак параллельности прямой и плоскости.

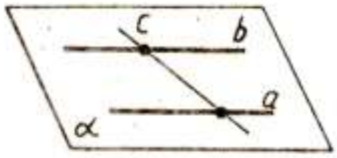
Теорема. Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна прямой, лежащей на плоскости то она параллельна этой плоскости.



Дано: аCα
в$\not\subset$α
<u>в||а</u>
Доказать в||α

Доказательство. Предположим, что в$\not\parallel$α→вηα=М, МЄα→МЄа→вηа=М, что противоречит условию (в||а), следовательно в||α что и требовалось доказать.





Задача 1. Отрезки ОА и ОВ пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1, являющихся серединами этих отрезков. Найдите расстояние АВ, если $\left|\grave{A}_1\hat{A}_1\right| = 3{,}8\tilde{n}\grave{\imath}$.

Ответ. АВ=7,6 см.

Задача 2. Из точек А и В плоскости α проведены вне ее параллельные прямые отрезки $\left|\grave{A}\grave{I}\right| = 16\tilde{n}\grave{\imath}$. и $\left|\hat{A}\grave{I}\right| = 12\tilde{n}\grave{\imath}$. Прямая МК пересекает плоскость α в точке С. Найти расстояние АС, если $\left|\grave{A}\hat{A}\right| = 9\tilde{n}\grave{\imath}$. (рассмотреть два случая).

Ответ. 36 см.

Домашнее задание.

1. Содержание конспекта.
2. **Задача.** Дан куб АВСД $A_1B_1C_1Д_1$:
   а) Укажите параллельные ребра куба.
   б) Укажите попарно ребра, являющиеся скрещивающимися отрезками.
   в) Сколько ребер скрещивается с одним ребром?

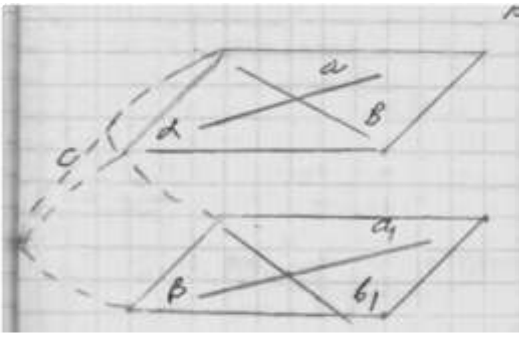
Урок №58. Тема 6.3.: Параллельность плоскостей.

План занятия.

Если плоскость пересекает прямую, параллельную данной плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

в) Признак параллельности двух плоскостей.

Теорема. Если две пересекающиеся прямые лежащие в одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Дано:
α, β - плоскости
аηв Сα
$а_1η_1в_1$ Сβ
а||$а_1$
в||$в_1$
Доказать α||β
Доказательство:
Т.к. а||$а_1$ то α||β, т.к. в||$в_1$ то в||β
Предположим плоскость α проходит через прямую а//β, то аηβ=С. Т.к. плоскость α проходит через прямую а||β и пересекает ее, то а||С (1), т.к. плоскость αпроходит через прямую в||β и пересекает ее, то в||С (2), условие (1) и условие (2) выполняются по предыдущей теореме.

Из условий (1) и (2) следует, что а||в, но они пересекаются, получили противоречие из-за предположения α||β, следовательно, следует принять α||β.

Задача. Плоскости α и β параллельны. Из точек А и В плоскости α проведены наклонные |АС|=37 см, |ВД|=125см.. Проекция наклонной АС на плоскость β=12см. Чему равна проекция наклонной ВД. (Ответ. 35 см.).

Задание на дом.

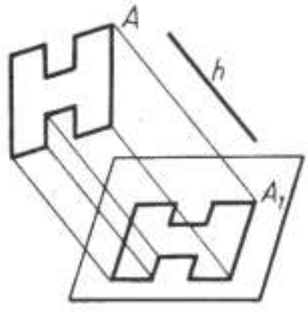
а) Выучить по конспекту.

б) **Задача.** Расстояние между параллельными плоскостями 8 дм. Отрезок длиной 10см. своими концами упирается в эти плоскости. Определить его проекцию на каждую плоскость.

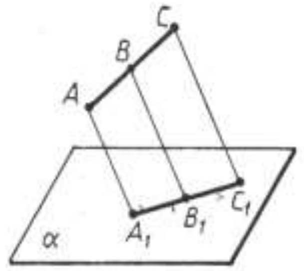
(Ответ. 6 см.).

Урок № 59. Тема 6.4.: Параллельное проектирование.

Для изображения пространственных фигур на плоскости пользуются параллельным проектированием. Берем произвольную прямую h, пересекающую плоскость α и проводим через произвольную точку А. фигуры прямую параллельную h. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью α **будет изображением (проекцией) точки А.** Аналогично поступаем с точками В и С. $\Delta A_1B_1C_1$будет **изображением (проекцией) ΔАВС.**



336-сурет

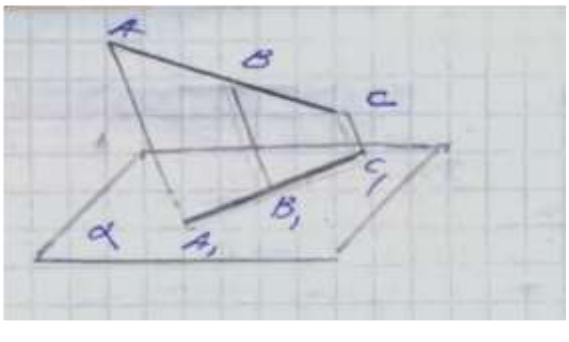


337-сурет

Свойства параллельных проекций.

1. Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости отрезками.
2. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости параллельными отрезками.

$AC \parallel BД \quad A_1C_1 \parallel B_1Д_1$



3. Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

$$\frac{\grave{A}\hat{A}}{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{\grave{A}_1\hat{A}_1}{\hat{A}_1\tilde{N}_1}$$

Решить задачу

Через вершину прямого угла С прямоугольного треугольника АВС проведена плоскость параллельная гипотенузе на расстоянии 1дм от нее. Проекции катетов на плоскость равна 3 дм и 5дм. Определить проекцию гипотенузы. (Ответ. 6 дм.)

Домашнее задание.

1) Выучить теорию по конспекту.

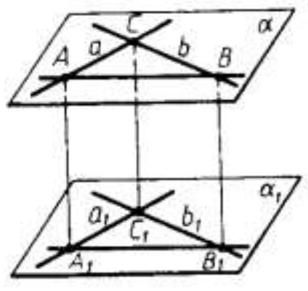
Задача 1. Отрезки двух прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями равны 51 см. и 53 см., а их проекции обносятся как 6:7. Определить расстояние между плоскостями. (Ответ. 45 см.).
Задача 2. Концы данного отрезка длиной 125см отстоят от плоскости на 100см и 56 см. Найти длину проекции отрезка на плоскость. (Ответ. 117 см.).

<u>Урок № 60 Тема 6.5 Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямой и плоскости.</u>

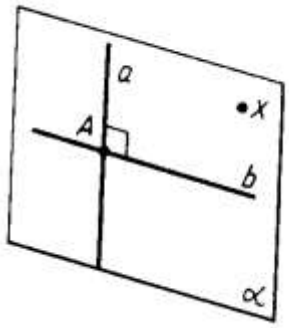
План занятия

1. **Определение перпендикулярности прямой и плоскости**
2. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.**

Определение. Прямая, пересекающая плоскость называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой лежащей на плоскости и проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.



350-сурет

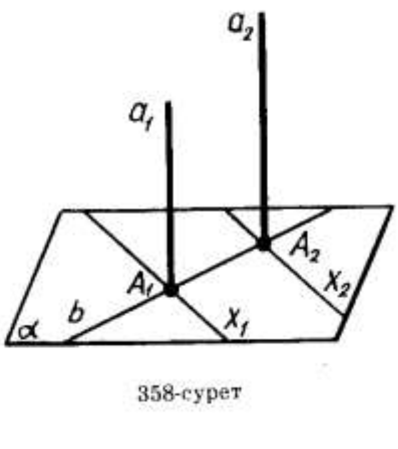


351-сурет

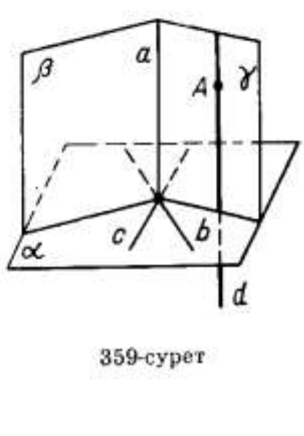
Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, пересекающая плоскость перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.

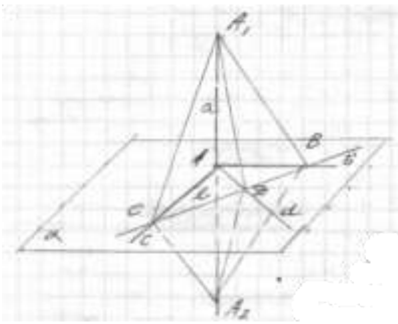
<u>Дано:</u>
плоскость α
всα
ссα
а⊥в а⊥с
<u>вηс=А</u> <u>Доказать:</u> а⊥α



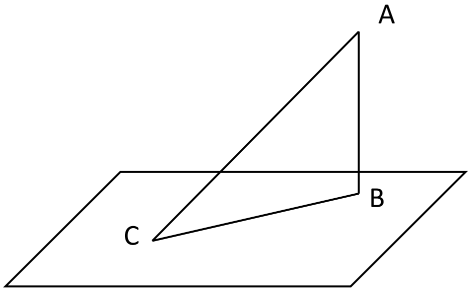
358-сурет



359-сурет



Доказательство:
Проведем: $AA_1=AA_2$, dcαℓηc=C
ℓηв=βℓηd=D, если докажем a⊥d, то a⊥α.
Рассмотрим:
1) ΔA_1CA_2 – равнобедренный (АС-медиана, высота)→$\underline{A_1C=A_2C}$
2) ΔA_1BA – равнобедренный (АВ-медиана, высота)→ $\underline{A_1B=A_2B}$
3) $\Delta A_1BC=\Delta A_2BC$ (по III признаку)$\underline{\to\angle A_1BC=\angle A_2BC}$
4) $\Delta A_1ВД=\Delta A_2ВД$ (по I признаку)→ $\underline{A_1Д=A_2Д}$
5) $\Delta A_1ДA=\Delta A_2ДA$ (по III признаку)→$\underline{\angle A_1AД=\angle A_2AД}$
но эти углы смежные →$\angle A_1AД=\angle A_2AД=90^0\to A_1A\perp d\to \underline{A_1A\perp\alpha}$



Домашнее задание.
1) Выучит по конспекту доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости.
2) **Задача.** АВСД – ромб в плоскости α. О – точка пересечения диагоналей ромба. Прямая d перпендикулярна к плоскости α и проходит через точку О. Е – точка прямой d. Найти расстояние от точки Е до вершины ромба, если |ОЕ|=8см, |АВ|=12см, один из углов ромба равен 60^0. (Ответ. 10см., $2\sqrt{43}$ñì .)
3) **Задача.** ΔАВС – равносторонний |АВ|=3см. Из вершины А восстановлен перпендикуляр. |АО|=4см. Найти площадь ΔОВС. (Ответ. $\frac{3\sqrt{91}}{4}$ ñì .)

<u>Урок № 60. Тема 6.6: Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трех перпендикулярах.</u>

План занятия.
Признак параллельности прямой и плоскости.
Признак параллельности двух плоскостей.
Признаке перпендикулярности прямой и плоскости.

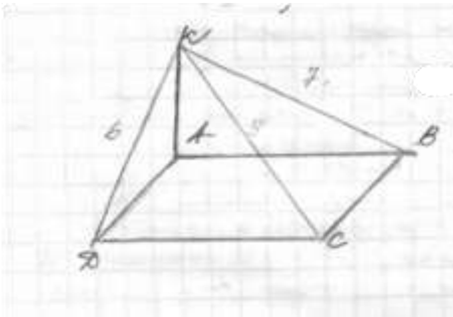
б) Дать определение угла между прямой и плоскостью
Задача. Из точки отстоящей от плоскости на расстоянии 12 см. проведены две наклонные образующие с плоскостью углы 30^0, а между собой угол 90^0. Определить расстояние между концами наклонных. (Ответ. $24\sqrt{2}$ñì .)
в) Доказать теорему о трех перпендикулярах.
Теорема. Прямая проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярной к проекции наклонной перпендикуляра к самой наклонной.

<u>Дано:</u>

Плоскость α
AB – наклонная
BC⊥α
aCα
a⊥BC
Доказать: a⊥AB

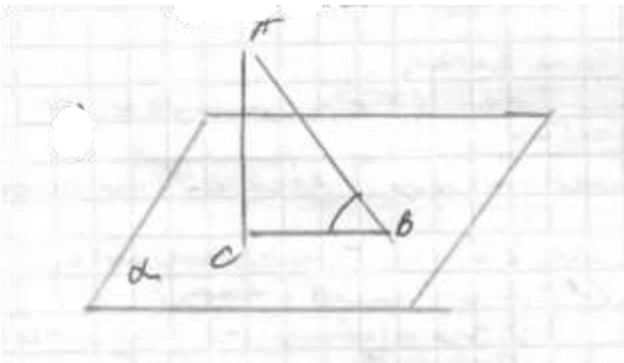
Доказательство:
BC⊥a или a⊥BC (1) AC⊥a или a⊥AC (2)
из условий (1) и (2)→a⊥β→a⊥AB
Обратная теорема. Прямая проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно наклонной, перпендикулярна проекции наклонной.

Задача. Из вершины А прямоугольника АВСД к его плоскости проведен перпендикуляр АК конец которого отстает от других вершин на расстоянии 6 см, 7см, 9 см. Найти |АК|.
(Ответ. 2 см.).



ΔКВС:|ВС|= $\sqrt{ÑÊ^2 - ÀÊ^2} = \sqrt{81-49} = \sqrt{32}ñì$
АД=ВС= $\sqrt{32}ñì$.
ΔАДК:|АК|= $\sqrt{ÊÄ^2 - ÀÄ^2} = \sqrt{36-32} = 2ñì$
|АК|=2см.

Домашнее задание
1) Доказать теорему о 3-х перпендикулярах.
2) Задача. Из точки отстоящей от плоскости на расстояние 10 см проведены две наклонные образующие с плоскостью углы в 45^0, а между собой угол в 60^0. Определить расстояние между концами наклонных. (Ответ. $10\sqrt{2}ñì$).



Дано:
АВ – наклонная равна 20 см.
$α=30^0, 45^0, 60^0$
Найти ВС. (3 случая).

Занятие 62.
Тема 6.7. : Двугранный угол. Перпендикулярность двух плоскостей.

План занятия.
1. Организация занятия.

2. Проверка домашнего задания.

а) Доказать теорему о трех перпендикулярах.

б) Решение задачи домашнего задания №61.

в) Рассказать планы доказательства теорем:

1) Признак параллельности прямой и плоскости.
2) признак параллельности двух плоскостей.
3) Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

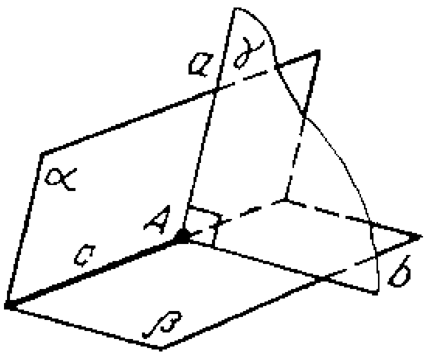
а) Дать определение двугранного угла.

б) Дать определение линейного угла, двугранного угла.

в) Дать определение перпендикулярных плоскостей.

г) Доказать теорему о признаке перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема. Если плоскость проходит через прямую перпендикулярную к другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



а)

<u>Дано:</u>

Плоскость $\alpha_1\beta$

в$C\beta$

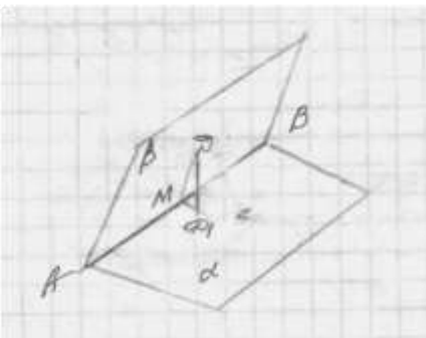
<u>в$\perp\alpha$</u>

Доказать $\beta\perp\alpha$

<u>Доказательство:</u>

Проведем прямую а$C\alpha$, К$\in$а, К$\in$в а$\perp$С. Т.к. в$\perp\alpha$,

то в$\perp$С, в$\perp$а и а$\perp$С по построению, то $\angle(\alpha\beta)=\angle$(ав)$=90^0$. т.е. <u>$\beta\perp\alpha$.</u>



Задача. Двугранный угол равен 45^0.Точка Д , лежащая на одной из его граней удалена от ребра 12см. Найдите расстояние от точки Д до другой грани. (Ответ. $6\sqrt{2}$ñì)

Задание на дом.

1) Выучить конспект.

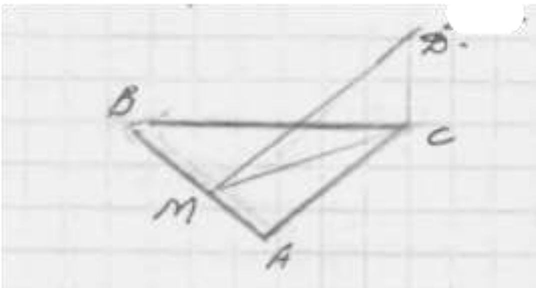
2) **Задача.** Длина общей гипотенузы двух равнобедренных прямоугольных треугольников равна 6 см. Если плоскости треугольников перпендикулярны, то найдите расстояние между вершинами их прямых углов. (Ответ $3\sqrt{2}\text{ñì}$)

Урок № 64. Тема 6.8. Решение задач.

План занятия.
Решить задачи.

Задача 1. Из точки отстающей от плоскости на 5 дм проведены под углом 30^0 к плоскости две наклонные, их проекции составляют между собой угол 120^0. Определить расстояние между основаниями наклонных. (Ответ. 15 дм.)

Задача 2. Катеты прямоугольного треугольника равны 120 см и 16 см. из вершины прямого угла С восстановлен перпендикуляр СД, равный 9,6 см. Определить расстояние от точки Д до гипотенузы. (Ответ. $9{,}6\sqrt{2}\text{ñì}$



$ÀÂ = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20\text{ñì}$.

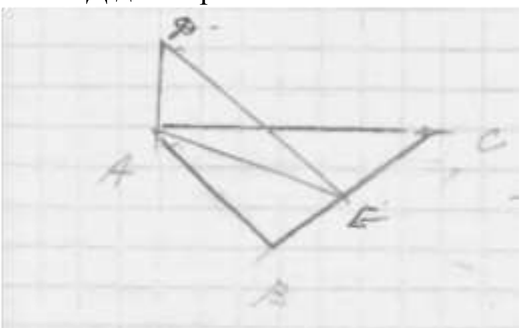
$S_{\Delta ÀÂÑ} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16 = 96\text{ñì}^2$

$96 = \frac{1}{2} ÀÂÑÌ$ $\qquad 96 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot ÑÌ$

$ÑÌ = \frac{96}{10} = 9{,}6\text{ñì}$

|ДМ|= $\sqrt{9{,}6^2 + 9{,}6^2} = 96\sqrt{2}\text{ñì}$ $\qquad$ |ДМ|=9,6 $\sqrt{2}\text{ñì}$

Задача 3. Стороны ΔАВС равны 10 см, 17см., 21 см. Из вершины большого угла А проведен перпендикуляр АД к плоскости ΔАВС длиной 15 см. Определить расстояние от точки Д до стороны ВС.



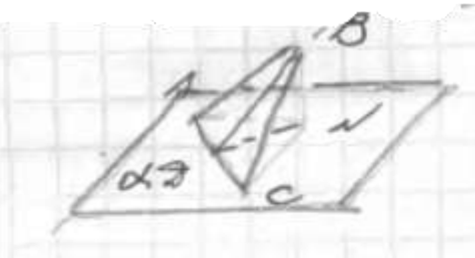
$S_{\Delta ÀÂÑ} = \sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3} = \sqrt{3\cdot 8\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 5} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84\text{ñì}$

$ÀÅ = \frac{2\cdot 84}{21} = 8\text{ñì}$ $\qquad$ |AE|=8 см.

$ÄÅ = \sqrt{8^2 - 15^2} = \sqrt{289} = 17\text{ñì}$

(Ответ. |ДЕ|=17см.)

Задача 4. Дан ΔАВС со сторонами |АВ|=9 см., |АС|=5см, |ВС|=6см. Через сторону АС проходит плоскость α, составляющая с плоскостью треугольника угол 45^0. Найти расстояние между плоскостью α и вершиной В.



$S_\Delta = \sqrt{10\cdot 1\cdot 5\cdot 4} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\text{ñì}^2$

$ÂN = ÀÄ\cdot \sin 45^0$

$10\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot ÂÄ$ $\qquad |ÂÄ| = 4\sqrt{2}\text{ñì}$

$ÂN = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\text{ñì}$

(Ответ. |BN|=4см.)

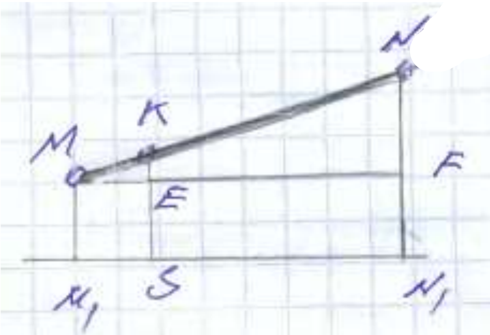
Домашнее задание

1) Выучить все теоремы.

2) **Задача 1.** ΔАВС равносторонний АВ=ВС=АС=8 см. Из вершины А восстановлен перпендикуляр АД к плоскости ΔАВС. Определить расстояние от точки Д до стороны ВС. (Ответ. 8 см.)

Задача 2. Из точки А проведены две наклонные, каждая из которых равна 12 см и наклонена под углом 450. Определить расстояние между основаниями наклонных, если угол между их проекциями прямой. (Ответ. 12 см.)

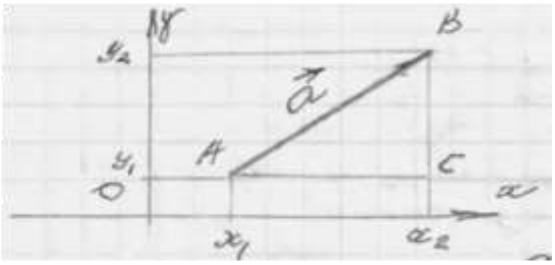
Задача 3. Концы отрезка MN удалены от плоскости на 3 см и 5 дм. Как удалена от плоскости точка, делящая отрезок MN в отношении 1:3. (Ответ. 4,5 см.).



__Урок № 65. Тема 7.1.: Векторы на плоскости.__

План занятия.

1. Определение вектора.
2. Обозначение вектора.
3. Изображение вектора.
4. Равенство векторов.
5. __Координаты вектора.__



$x_2 - x_1 = a_1$

$y_2 - y_1 = a_2$

$\vec{a}(\grave{a}_1;\grave{a}_2)$ или $\overrightarrow{(\grave{a}_1;\grave{a}_2)}$

Расстояние между двумя точками

$\grave{A}\hat{A} = \sqrt{\grave{A}\tilde{N}^2 + \hat{A}\tilde{N}^2}$

$|AB| = \sqrt{(\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)^2(\acute{o}_2 - \acute{o}_1)^2}$

Длина вектора (модуль вектора)

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Координаты середины отрезка. $\tilde{o} = \dfrac{\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2}{2}$; $\acute{o} = \dfrac{\acute{o}_1 + \acute{o}_2}{2}$;

Действие над векторами.

Сложение.

а) геометрически (способы параллелограмма, треугольника, многоугольника).

б) аналитически.

$\vec{a}(\grave{a}_1;\grave{a}_2)$ $\quad \vec{a} + \vec{a} = \vec{n}(\grave{a}_1 + \hat{a}_1;\grave{a}_2 + \hat{a}_2)$

$\vec{a}(\hat{a}_1;\hat{a}_2)$

Вычитание

а) геометрически (методом треугольника)

б) аналитически.

$\vec{a}(\grave{a}_1;\grave{a}_2)$ $\quad \vec{a}(\hat{a}_1;\hat{a}_2)$ $\quad \vec{a} - \vec{a} = \vec{d}(\grave{a}_1 - \hat{a}_1;\grave{a}_2 - \hat{a}_2)$

Умножение вектора на число

а) геометрические
б) аналитические
$\vec{a}(\grave{a}_1;\grave{a}_2)$
$\vec{a}\cdot\tilde{o}(\grave{a}_1\lambda;\grave{a}_2\lambda)$

Скалярное произведение

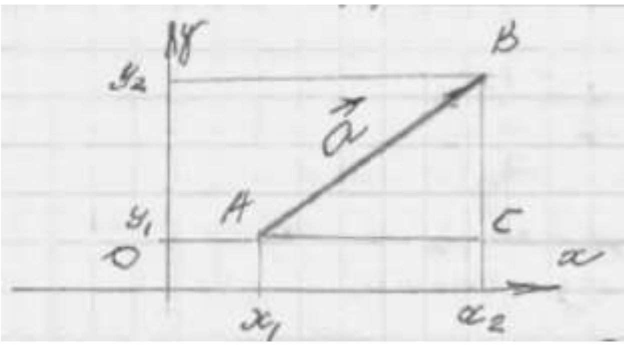
Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}(\grave{a}_1;\grave{a}_2)$, $\vec{a}(\hat{a}_1;\hat{a}_2)$ называется число

$\vec{a}\vec{a} = \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2$

Пример: $\vec{a}(2;3)$ $\vec{a}(3;-4)$

$\vec{a}\vec{a} = 2\cdot 3 + 3\cdot(-4) = 6 - 12 = -6$

Теорема. Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.



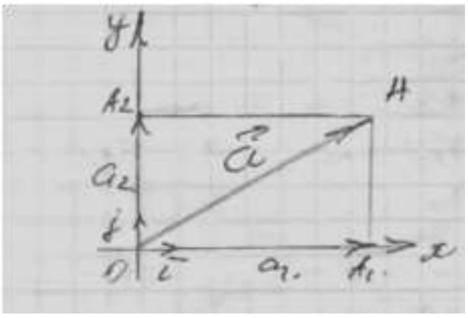
$\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$

Угол между двумя векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{a}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{\grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2}{\sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2}\cdot\sqrt{\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2}}$$

Определение. Два отличных от нуля вектора называются коллинеарными, если они не лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Разложение вектора по координатным осям



$\hat{I}\,\vec{A} = \hat{I}\,\vec{A}_1 + \hat{I}\,\vec{A}_2$
$\vec{a} = \grave{a}_1\cdot\vec{i} + a_2\cdot\vec{j}$
$\vec{i}, \vec{j}$ - единые векторы для осей x, y (орты).

Закрепление нового материала.

Домашнее задание: выучить конспект.

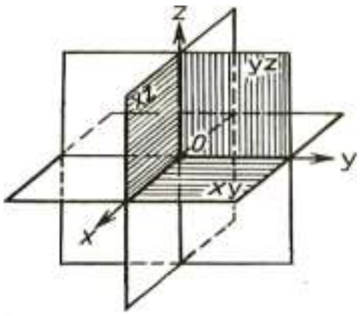
Урок № 66. Тема 7.2.: Прямоугольные координаты на плоскости и пространстве. Действия над векторами, заданными своими координатами. Длина вектора, угол между векторами.

План занятия.

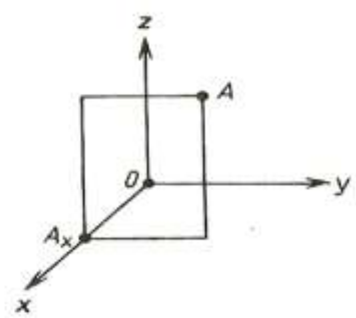
1. **Прямоугольные координаты на плоскости и пространстве.**
2. **Действия над векторами, заданными своими координатами.**
3. **Длина вектора, угол между векторами.**

Прямоугольная система координат в пространстве

Координатами вообще называют числа, определяющие положение точки на плоскости, в пространстве. Рассмотрим пространственную прямоугольную систему координат.



378-сурет



379-сурет

M (*а; в; с*)

а - абсцисса
в - ордината
с - аппликата

N (0; 3; 4) – в плоскости ZOУ
К (5; 0; 3) – в плоскости XOZ
Р (4; 1; 0) – в плоскости XOУ
Е (0; 0; 3) – на оси OZ

Автором прямоугольной системы координат является французский математик Рене Декарт (1596-1650). Поэтому она называется декартовой.

Формулы для векторов на плоскости справедливы для векторов в пространстве.

$\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ - координаты вектора.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ - расстояние между точками (А; В)

$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}$ - длина (модуль) вектора $\vec{a}$

Пусть даны векторы $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a}(\hat{a}_1; \hat{a}_2; \hat{a}_3)$

Тогда $\vec{a} + \vec{a} = \vec{n}(a_1 + \hat{a}_1; a_2 + \hat{a}_2; a_3 + \hat{a}_3)$ - сумма $\vec{a}$ и $\vec{a}$

$\vec{a} - \vec{a} = d(a_1 - \hat{a}_1; a_2 - \hat{a}_2; a_3 - \hat{a}_3)$ - разность $\vec{a}$ и $\vec{a}$

$\vec{a}\vec{a} = a_1\hat{a}_1 + a_2\hat{a}_2 + a_3\hat{a}_3)$ - скалярное произведение векторов

$$\cos\varphi = \frac{a_1 в_1 + a_2 в_2 + a_3 в_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{в_1^2 + в_2^2 + в_3^2}}$$

Пример 1. Даны точки А(1;-3;4) В(3;-2;-1)
Найти координаты вектора АВ и его длину.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}(-1;2;-2)$ $\vec{a}(1;-3;4)$
Найти $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{a} - \vec{a}$, $\vec{a}\vec{a}$, cosφ

Пример 3. Длина векторов равны $\vec{a}(0;4;3)$, $\vec{a}(2;0;8)$
Найти у

Пример 4. Найти координаты вектора $\vec{a}(2t - t; t)$ если длина его $\sqrt{54}$
ответ. (6; -3; 3) или (-6; 3; -3)

Домашнее задание

а) Выучить конспект.

б) 1). Даны точки M (-3; -1; 4) N(0; 2; 5)

Найти координаты вектора $\overrightarrow{NM}$ и его длину.

Ответ. $\overrightarrow{NM}(-3;-3;-1)$ $\left|\overrightarrow{NM}\right| = \sqrt{22}$

2). Даны векторы $\vec{a}(-2;0;-5)$ $\vec{a}(3;-4;-1)$

Найти $\vec{a}+\vec{a}=\vec{n}$, $\vec{a}-\vec{a}=d$, $\vec{a}\vec{a}$, cosφ, $3\vec{a}$

Ответ. $\vec{a}+\vec{a}=\vec{n}(1;-4;-6)$ $\vec{a}-\vec{a}=\vec{d}(-5;4;-4)$

$\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{75}}$; $3\vec{a}(-6;0;-15)$

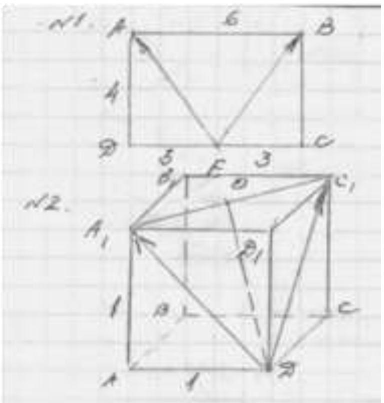
1) Длины векторов $\vec{a}(2;1;3)$ и $\vec{a}(-1;x;2)$ равны

Ответ. (±3)

Урок № 68. Тема 7.4.: Решение задач. Контрольная работа.

План занятия.

Решение задачи.



ABCD - прямоугольник

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB} = ?$

$\overrightarrow{FA}(-3;4)$ $\overrightarrow{F\hat{A}}(3;4)$

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB} = (-3)\cdot 3 + 4\cdot 4 = -9+16 = 7$

ответ. 7

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

$\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}$

$\overrightarrow{DA_1}(XA_1 - XD; \acute{O}A_1 - \acute{O}D; ZA_1 - ZD)$

$\overrightarrow{DA_1}(1-1;0-1;1-0)$ $\overrightarrow{DA_1}(0;-1;1)$

$\overrightarrow{D\tilde{N}_1}(X\tilde{N}_1 - XD; \acute{O}\tilde{N}_1 - \acute{O}D; Z\tilde{N}_1 - ZD)$

$\overrightarrow{D\tilde{N}_1}(0-1;1-1;1-0)$ $\overrightarrow{D\tilde{N}_1}(-1;0;1)$

$\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DC} = (0(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1) = 1$

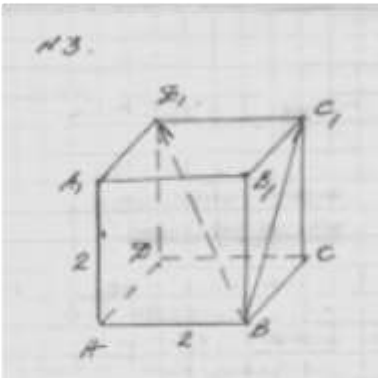
ответ. $\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DC} = 1$

II вариант решения задачи №2 (лучше)

$\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{DC_1} = \left|\overrightarrow{DA_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC_1}\right|\cdot\cos\varphi$ $\left|\overrightarrow{DA_1}\right| = \sqrt{2}$; $\left|\overrightarrow{D\tilde{N}_1}\right| = \sqrt{2}$

$$\angle \grave{A}_1\hat{I}D \ : \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{DO}{DA_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{\varphi}{2} = 30^0 \qquad \varphi = 60^0$$

$\vec{DA_1} \cdot \vec{DC_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$ ответ. $\vec{DA_1} \cdot \vec{DC_1} = 1$



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб

$\vec{\hat{A}D_1} \cdot \vec{BC_1} = ?$

$\vec{\hat{A}D_1} \cdot \vec{BC_1} \left|\vec{BD_1}\right| \cdot \left|\vec{BC_1}\right| \cdot \cos\varphi$

$\left|\vec{BC_1}\right| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\left|\vec{BD_1}\right| = \sqrt{(2\sqrt{2}) + 2^2} = \sqrt{8+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\left|\vec{BD_1}\right| = 2\sqrt{3}$

$\vec{\hat{A}D_1} \cdot \vec{BC_1} = 2\sqrt{2} \cdot 2\cancel{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 4 \cdot 2 = 8$

ответ. $\vec{\hat{A}D_1} \cdot \vec{BC_1} = 8$

Контрольная работа по теме «Векторы»

Работа выполняется по индивидуальным карточкам.

Урок № 69, 70. Тема 8.1.: Неопределенный интеграл и его свойства. Непосредственное интегрирование.

План занятия.

1. **Неопределенный интеграл**
2. **Свойства неопределенного интеграла.**
3. **Непосредственное интегрирование.**

Пусть функция y=F(x) (1) имеет производную f(x), тогда ее дифференциал de=f(x)dx (2). Функция (1) по отношению к ее дифференциалу (2) называется **первообразной**.

Определение. Первообразной функцией для выражения f(x)dx называется функция F(x), дифференциал которой равен f(x)dx.

Найдем первообразную функцию для выражения 2xdx.

Это будет

x^2

x^2+1

x^2-2

……

x^2+c – совокупность первообразных функций это записывается $\int 2xdx = x^2 + c$ и называется **неопределенным интегралом.**

Определение. Совокупность всех первообразных функций f(x)+c для дифференциала f(x)dx называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, т.о. $\int f(x)dx = f(x) + c$

$\int$ - знак интеграла.

f(x)dx – подынтегральное выражение.

С – произвольная постоянная интегрирования.

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**.

Основные свойства неопределенного интеграла.

I Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

II Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции сложенной с постоянной интегрирования

$$\int d\left[F(x)\right] = F(x) + c$$

III Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

IV Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой из них.

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Основные формы интегрирования

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ n≠-1
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
4. $a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ *a>0 n≠1*
5. $\int x^x dx = \ell^x + c$
6. $\int \cos dx = \sin x + c$
7. $\int \sin dx = -\cos x + c$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c$ $|x < a|$ *a ≠ 0*

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c \qquad a \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \qquad a \neq 0$

Решить в аудитории

1. $\int 3dx$
2. $\int 2x^5 dx$
3. $\int x\frac{n-1}{5}dx$
4. $\int \sqrt{x^4}dx$
5. $\int \frac{dx}{x^3}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$
7. $\int (3x^2-4x+5dx)$
8. $\int \frac{3dx}{1+x^2}$
9. $\int \frac{dx}{9-x^2}$
10. $\int \frac{2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$
11. $\int \left(\ell^x + 2\cos x\right)dx$
12. $\int \frac{dx}{25+4x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{25}{4}+x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{5}{2}}arctg\frac{2x}{5} + \tilde{n} =$

$= \frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5} + c$

Домашнее задание

1. $\int (4x^3+4x-3)dx \qquad x^4+2x^2-3x+c$
2. $\int (x+3)^2 dx \qquad \frac{x^3}{3}+3x^2 = 9x-c$
3. $\int x^2(1+2x)dx \qquad \frac{x^3}{3} = \frac{1}{2}x^4+c$
4. $\int \sqrt{x}dx \qquad \frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$
5. $\int \sqrt[3]{x^2}dx \qquad \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+c$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad 3\sqrt[3]{x}+c$

$x^3-2\sin x+c$

7. $\int (3x^2-2\cos x)dx$
8. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx \qquad 2tgx+3ctgx+c$

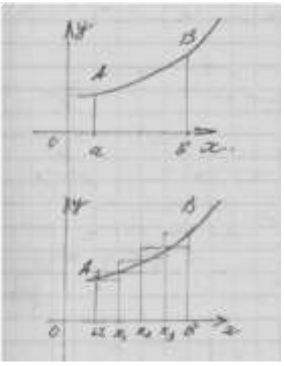
9. $\int(2e^{x} - 3\cos x)dx$ $\qquad$ $2e^{x} + \sin x + c$

10. $\int\frac{6dx}{1+x^{2}}$ $\qquad$ $6arctgx + c$

Урок № 71. Тема 8.2.: Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл.

План.

1. **Площадь криволинейной трапеции.**
2. **Определенный интеграл**



Рассмотрим функцию y=f(x)xЄ[*а*;*в*]

Фигура А*ав*В называется **криволинейной трапецией**.

Выразим площадь данной трапеции. Для чего разобьем на n равных частей отрезок [*а*;в]. Получим отрезки [*а*;x_1], [x_1;x_2]….. [x_{n1};*в*]

Через mi и Mi обозначим наибольшее и наименьшее значения функции f(x) на любом отрезке [x_{i-1};x_i].

Криволинейная трапеция А*ав*В разбивается на n частей. Очевидно, площадь i-ой части не меньше $m_i(x_i-x_{i-1})$ и не больше $M_i(x_i-x_{i-1})$, следовательно, площадь криволинейной трапеции не меньше суммы $m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\ldots+m_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} mi\Delta xi$ где $\Delta x_i=x_{i-1}$ и не больше суммы

$M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots+M_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} Ìi\ \Delta xi$. Обозначим эти суммы sn и Sn, получим

Sn≤SAавB≤Sn.

В последнем неравенстве слева площадь ступенчатой функции, которая содержится в данной криволинейной трапеции, а справа – площадь ступенчатой функции, которая содержит данную криволинейную трапецию.

При n→∞ $\lim_{n\to\infty} Sn = S_{AaâB}$ $\lim_{n\to\infty} S = S_{AaâB}$

Рассмотрим снова криволинейную трапецию А*ав*В разбитую на n отрезков. Выберем на i-ом отрезке произвольную точку γi. Пусть mi и Mi наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [x_{i-1}; x_i] и очевидно mi≤f(ηi)≤Mi. Умножим каждый член данного неравенства на $\Delta x_i=x_i=x_{i-1}$ и просуммируем почленно, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} Ìi\ \Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} f(\gamma i)\Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} Mi\Delta xi$$

Очевидно, $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(\gamma i)\Delta xi$ существует и не зависит от выбора точки γi т.о.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(\gamma i)\Delta xi = S_{AaâÂ}$$

Определенный интеграл

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta xi = f(\gamma_1)\Delta x_1 + f(\gamma_2)\Delta x_2 \ldots + f(\gamma n)\Delta x_n$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ называется интегральной.

Определение. Если предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{i=n} f(\gamma i)\Delta xi$ существует и не зависит от выбора точки γ_i, то функция f(x) называется интегрируемой на отрезке [*а*, *в*], а предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [*а*, *в*] и обозначается $\int\limits_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx$.

Читается: интеграл от *а* до *в* от $f(x)dx$

а – нижний предел интегрирования

в – верхний предел интегрирования

и так $\int\limits_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{i=n} f(\gamma_i)\Delta x_i$

Закрепление нового материала.

Домашнее задание – выучить конспект.

Урок № 72. Тема 8.3.: Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.

План.

1. **Свойства определенного интеграла.**
2. **Вычисление определенного интеграла.**

Свойства определенного интеграла.

Определенный интеграл обладает 3, 4 свойствами неопределенного и еще таким свойством:

Если поменять местами пределы интегрирования, то знак перед интегралом изменится на противоположный.

Вычисление определенного интеграла.

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

$$\int\limits_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx = F(x)\int\limits_{a}^{\hat{a}} = F(\hat{a}) - F(a)$$

Пример: $\int\limits_{1}^{2} 2x^3dx = \frac{2x^4}{4}\int\limits_{1}^{2} = \frac{1}{2}x^4\int\limits_{1}^{2} = \frac{1}{2}(2^4 - 1^4) = \frac{1}{2}(16-1) = \frac{15^1}{2} = 7,5$

Решить в аудитории

1) $\int\limits_{-1}^{+1} (x^2+1)dx$ ответ $2\frac{2}{3}$

2) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 3(u^2+1)du$ ответ 3,25

3) $\int\limits_{1}^{8} 4\sqrt[3]{\tilde{o}}dx$ ответ 45

4) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ответ $3(\sqrt{2}-1)$

5) $\int\limits_{1}^{4}\left(3x^2-2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ ответ 47

6) $\int\limits_{1}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ ответ $6\frac{2}{3}$

7) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin\varphi d\varphi$ ответ 2

8) $\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}+\sin x\right)dx$ ответ 3,96

9) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(e^x-\cos x\right)dx$ ответ $e^{\pi}-1$

Домашнее задание
Вычислить интегралы

1. $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}t+4t^2\right)dt$ ответ $2\frac{2}{3}$
2. $\int\limits_{-1}^{0}\left(3x^2+1\right)dx$ ответ 2
3. $\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}dx$ ответ $4\frac{2}{3}$
4. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2}$ ответ $\frac{1}{2}$
5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi$ ответ 1
6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2dt}{\cos^2 t}$ ответ 2
7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi$ ответ 2
8. $\int\limits_{\frac{\pi}{0}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$ ответ ≈-0,68

Урок № 74 Тема 8.5.: Применение определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур.

План.

Определение определнного интеграла.

Решение упражнений.

Определение. Определенный интеграл $\int\limits_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx$ численно равен площади фигуры, заключенной между осью ох, графиком функции y=f(x) и прямой х=*а*; х=*в*.

Решить

1. Вычислить S фигуры ограниченной кубической параболой $y=x^3$, осью ох и прямыми х=-1; х=1. Ответ 0,5 кв.ед.

2. Вычислить S фигуры, ограниченной кривой $y=x^2-4x$ и осью ох. Ответ $10\frac{2}{3}$ ед.пл.

3. Вычислить S фигуры, ограниченной графиком функции y=cosx, осью ох и прямой $\tilde{o}=-\frac{\pi}{2}$ и $\tilde{o}=\frac{\pi}{2}$. Ответ 20 кв.ед.

4. Вычислить S фигуры, ограниченной линиями y=x+3, $y=x^2+1$. Ответ 4,5 ед.пл.

Домашнее задание

1. Определить S фигуры, ограниченной прямой y=5x осью ох, прямой х=3. Ответ 22,5 ед.пл.

2. Определить S фигуры, ограниченной кривой $\acute{o}=\frac{1}{2}\tilde{o}^2$ осью ох и прямыми х=2; х=4. Ответ $9\frac{1}{3}$ ед.пл.

3. Определить S фигуры, ограниченной осью ох и линией $y=2x-x^2$. Ответ $\frac{3}{3}$ ед.пл.

4. Определить S фигуры, ограниченной линиями $\acute{o}=\frac{1}{2}\tilde{o}^2$ и y=4-x. Ответ 18 ед.пл.

<u>**Урок №75 .Тема 9.1. : Многогранники. Призма. S бок. призмы. S полн. призмы.**</u>

План занятия.

1.Определение многогранника.

2. определение призмы. Виды призм.

3. Площадь боковой и полной поверхности призм**ы.**

Определение:

Объединение ограниченной пространственной области и ее границы называют телом.

Границу тела называют его поверхностью, а пространственную область - внутренней областью.

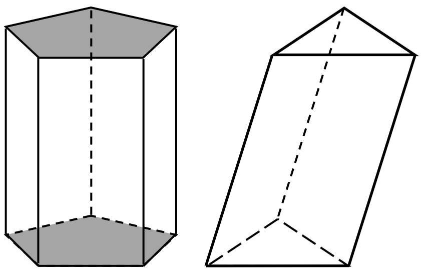
Многогранником называют тело, поверхность которого есть объединение конечного числа многоугольников.

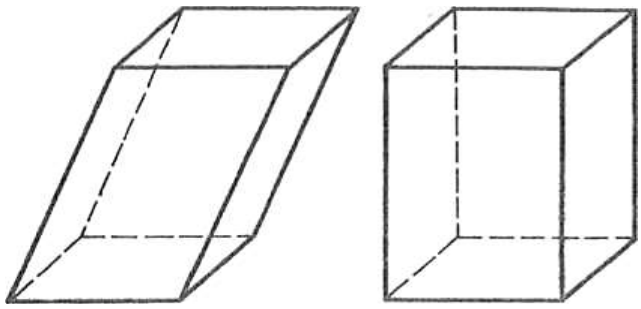
Многоугольники, составляющие поверхность многогранника называют его гранями, стороны этих многоугольников -ребрами, а вершины- вершинами.

Отрезок, который соединяет две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называют диагональю многогранника.

Определение: Призмой называется многогранник, две грани которого – одноименные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, и любые два ребра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны.

Различают прямые и наклонные призмы. Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскости основания, называется прямой призмой. Если боковые ребра не перпендикулярны плоскостям оснований, то ее называют наклонной призмой.





Решить в аудитории задачу.

Определить S полн. Правильной четырехугольной призмы, если сторона основания равна 4см, а диагональ равна 8 см. и составляет с плоскостью основания угол 45^0.

Ответ 72см^2.

Домашнее задание

1) Выучить конспект.

2) Задача. Определить S полн. Правильной треугольной призмы, в которой сторона основания равна 2 см, а диагональ боковой грани равна 4 см. и составляет с основанием угол 60^0.

Ответ. S полн.= $14\sqrt{3}$ñì ^{2}

Урок № 76. Тема 9.2.: Параллелепипед.

План.

1) Дать определение параллелепипеда.

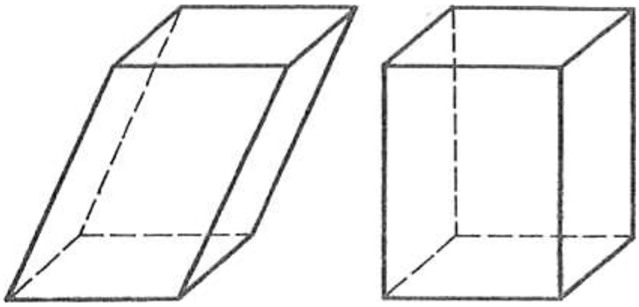
2) Назвать виды параллелепипедов.

3) Доказать теорему о диагонали прямоугольного параллелепипеда.

Определение. Параллелепипедом называется призма, основанием, которой служит параллелограмм.

Все шесть граней праллелепипеда-параллелограммы.

Некоторые свойства параллелепипеда:



1.Середина диагонали параллелепипеда есть его центр симметрии.
2.Противолежащие грани параллелепипеда попарно конгруэнтны и параллельны.
3.Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делят его пополам.
Если боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны плоскости его основания, то параллелепипед называется прямым.

Решить задачи.
В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12м^2. Найти высоту.   Ответ 2м.
2) Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32м^2, а полная поверхность 40м^2. Найти высоту.

Решение.

2Sосн.=40-32-8м^2 Sосн.=4м^2.   Сторона основная $\sqrt{4} = 2\grave{\imath}$
Sбок.=Ph   32=4·2·h   h=4м Ответ.

Задача №1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7:24, а площадь диагонального сечения равна 50 дм^2. Определить Sбок.   Ответ 124 дм^2.
Задача №2. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся 3:7:8, а площадь полной поверхности 808см^2. Определить ребра.   Ответ 6; 14; 16.
Задача №3. В прямой треугольной призме стороны основания равны 25дм, 29дм, 36дм, а площадь полной поверхности равна 1620дм^2. Определить Sб. и высоту призмы.
Ответ 9м^2, 1м.

Контрольные вопросы:

1. Чем отличаются многогранники от многоугольников?
2. Определение многогранника.
3. Определение призмы, виды призм
4. Определение параллелепипеда.

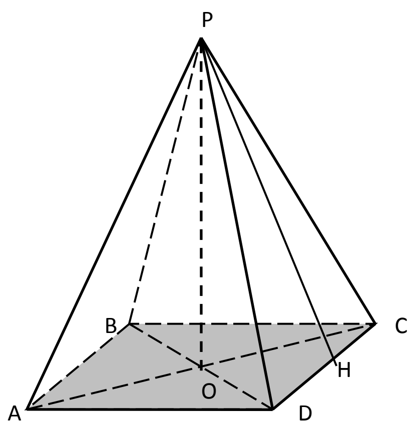
Домашнее задание.

а) Выучить теоретический материал по конспекту.
Задача №1. Определить Sполн. Прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50 см, а стороны основания 40 см, 13 см, 37см. Ответ 4980 см^2.
Задача №2. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, высота равна 8 дм. Определить площадь диагонального сечения.   Ответ 2м^2.

Урок № 77. Тема 9.3. Пирамида.

План занятия.

1) Определение многогранного угла.
2) Определение пирамиды.
3) Элементы пирамиды.
4) Формула боковой поверхности пирамиды.
5) Виды пирамиды.



Определение. Пирамидой называется многогранник, образованный всеми отрезками, соединяющими данную точку – вершину пирамиды с точками плоского **многогранника - основания пирамиды**.

Определение. Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью параллельной основанию.

$$S_{б.п.} = \frac{1}{2} pl \quad S_{п.п.} = S_{б.п.} + S_{осн.}$$

Решение задачи.

Задача. В правильной треугольной пирамиды сторона основания равна 8 см, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60^0. Определить Sполн.

Ответ $(\frac{12\sqrt{208}}{3}+116\sqrt{3})ñì^{2}$

Итоговые вопросы:

1. Определение пирамид.
2. Виды пирамид.
3. Назовите элементы пирамиды.

Домашнее задание

1. Выучить содержание конспекта.
2. **Задача 1.** В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60^0. Определить Sполн.

Ответ 192 $см^2$.

3. **Задача №2.** Основание пирамиды прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, каждое боковое ребро равно 13см. Определить высоту. Ответ 12 см.

<u>Урок № 78 (2) Тема: Усеченная пирамида.</u>

План.

1. Дать определение усеченной пирамиды. Назвать элементы усеченной пирамиды.
2. Доказать теорему о S бок. правильной усеченной пирамиды.

Определение. Пирамидой называется многогранник , одна из граней которого многоугольник, а остальные грани-треугольники , имеющие общую вершину.

Если основание пирамиды –правильный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центр этого многоугольника, то пирамиду называют правильной.

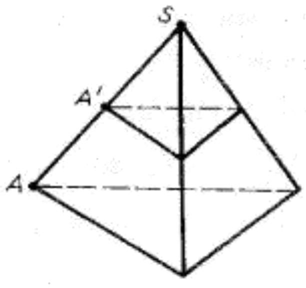
Сечение пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию, можно отобразить на основание гомотетией с центром в вершине пирамиды.

Усеченная пирамида имеет два основания, являющиеся гомотетичными многоугольниками.

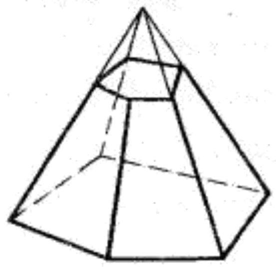
Перпендикуляр к плоскостям оснований усеченной пирамиды, концы которого принадлежат этим плоскостям, называют высотой усеченной пирамиды.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды- конгруэнтные равнобедренные трапеции, их высоты называют апофемами усеченной пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна полусумме периметров, оснований, умноженной на апофему.



423-сурет



424-сурет

$$S_{b.b} = (p_1 + p_2)\frac{l}{2}$$

$$S_{t.b} = S_{b.b} + S_1 + S_2$$

3. Решение задачи.

Задача №1. Определить Sбок. правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если диагонали оснований 8 см и 4 см, а боковое ребро равно 12 см. Ответ $24\sqrt{71}$ñì ^{2}

Задача №2. Определить Sполн. Правильной усеченной треугольной пирамиды со сторонами 4 см и 2 см, а апофема наклонена к плоскости основания под углом 45^0.

Ответ $6\sqrt{6}$ñì ^{2}

Домашнее задание

а) Изучить конспект.

б) **Задача №1.** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8м и 2м. Высота равна 4м. Найти Sп. Ответ 168м^2.

Задача №2. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 6м и 12м, высота равна 1м. Найти Sб. Ответ 54м^2.

Тема 9.4.: Решение задач.

а) Решение задач №1, 2.

3. Решение задачи

Задача №1. В правильной треугольной призме все ребра равны, Sбок. равна 12м^2. Найти высоту. Ответ H=2м.

Задача №2. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания равной 4 см проведена плоскость под углом 30^0 к основанию и перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Определить S сечения. Ответ 6см^2.

Домашнее задание

1) Повторить тему «Многоугольники».

Задача №1. Sбок. правильной четырехугольной призмы равна 32м^2, Sполн. равна 40м^2. Определить высоту. Ответ 4м.

Задача №2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7см, сторона основания 8см. Найти боковое ребро. Ответ 9 см.

Контрольные вопросы:

1) Что называется многогранником?
2) Перечислить элементы многогранника.
3) Что называется призмой?

4) Назвать виды призм.
5) Вывести формулы Sбок., Sполн. прямых призм.
6) Что называется пирамидой?
7) Формулы Sбок., Sполн. правильной пирамиды.
8) Что называется усеченной пирамидой?
9) Формулы Sбок., Sполн. правильной призмы.

Урок № 80. Тема9.5.: Тела вращения: цилиндр, конус, усеченный конус их сечение.

План

1. Цилиндр. Сечение цилиндра плоскостями.
2. Определение конуса.
3. Усеченный конус. Сечение усеченного конуса плоскостями.

Определение. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами , называется цилиндром.

Цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги- основаниями цилиндра. Образующие цилиндрической поверхности называются образующими цилиндра. Все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями. Длина образующей называется высотой цилиндра, а радиус основания- радиусом цилиндра.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности цилиндра и двух оснований.

$$S_{б.б.} = 2\pi rh$$

$$S_{т.б.} = 2\pi r(r+h) \quad S_{т.б.} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Определение. Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей, называется конусом. Коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса, а круг- основанием конуса.

Конусом называется тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого –диаметр основания конуса, а боковые стороны- образующие конуса. Это сечение называется осевым.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром, расположенным на оси конуса.

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания.

$$S_{б.б.} = \pi rl \; S_{т.б} = \pi rl + \pi r^2$$

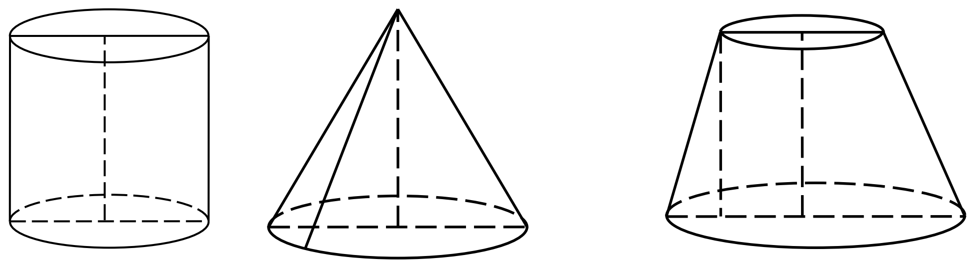
Определение. Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, параллельным основанию.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.

Площадб боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.
Изображение цилиндра, конуса и его элементы на чертеже.

$$S_{б.б.} = \pi\left(r_1 + r_2\right)l \ ,$$

$$S_{т.б.} = \pi\left(r_1 + r_2\right)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$



Решить в аудитории.

Задача 1. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120^0. Длина оси h=20см. Ее расстояние от секущей плоскости *a*=2см. Определить площадь сечения. Ответ $80\sqrt{3}$ñì ^{2}

Задача №2. Через вершину конуса под углом 450 к основанию проведена плоскость отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10см. Определить площадь сечения. Ответ $100\sqrt{2}$ñì ^{2}

Задача №3. Радиусы оснований усеченного конуса 3дм и 7дм. Образующая равна 5дм. Найти S осевого сечения. Ответ 30дм^2.

Домашнее задание.

1. Учить по конспекту.
2. Решить задачи:

а) Образующая конуса 20см, наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найти высоту. Ответ 10см.

б) Радиус основания конуса 3м, высота конуса 4м. Найти образующую. Ответ 5м.

в) Радиус основания цилиндра 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения. Ответ 5м.

г) Высота цилиндра 8дм, радиус основания 5дм. Найти S сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4дм от нее.

OB=5см
ON=4дм

Решение

$NB = \sqrt{OB^2 - ON^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$äì

AB=6дм

Sсеч.=AB·h=6·8=48дм^2. Ответ 48дм^2.

Тема 9.6.: Осевые сечения цилиндра, конуса, усеченного конуса.

План занятия.

1. **Осевые сечения цилиндра.**
2. **Осевые сечения конуса.**
3. **Осевые сечения усеченного конуса.**

Sб.цил.$=2\pi RH$

Sпол.цил.$= 2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R)$

Sбок.конуса$=\dfrac{2\pi R\cdot \ell}{2}=\pi R\ell$

Sполн.конуса$=\pi R\ell+\pi R^2=\pi R(\ell+R)$

Решить в аудитории

Задача №1. Высота цилиндра на 10см больше радиуса основания, а Sполн.$=144\pi$см^2. Определить R и H. Ответ 4см и 14см.

Задача №2. Определить высоту усеченного конуса, если его Sполн.$=572\pi$м^2, а радиусы оснований 6м и 14м. Ответ 15м.

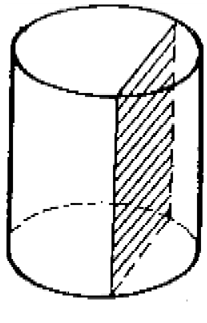
Домашнее задание

1. Выучить содержание конспекта.
2. Решить задачи.

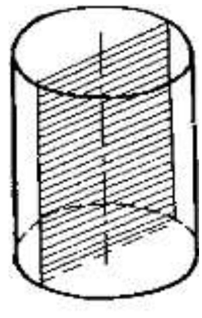
Задача №1. Полуцилиндрический свод подвала имеет 5м длины и 5,8м ширины в диаметре. Определить Sполн. подвала. Ответ $\approx$101м^2.

Задача №2. Поверхность конического шпица башни равна 250м^2, диаметр основания 9м. Определить высоту шпица. Ответ 12,4м.

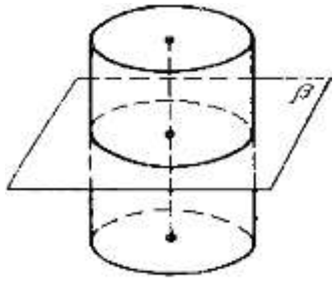
Задача №3. Конусообразная палатка высоты в 3,5м и Д=4м покрыта парусом. Сколько м^2 пошло на палатку. Ответ $\approx$ 25,3м^2.



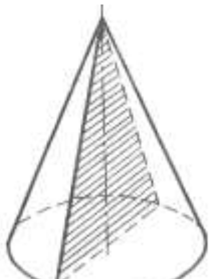
435-сурет

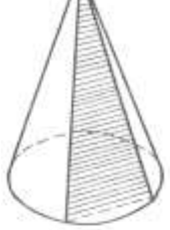


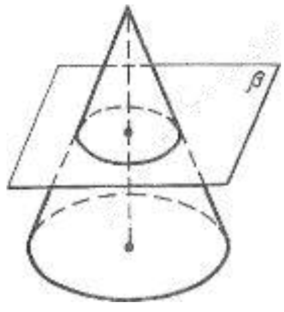
436-сурет



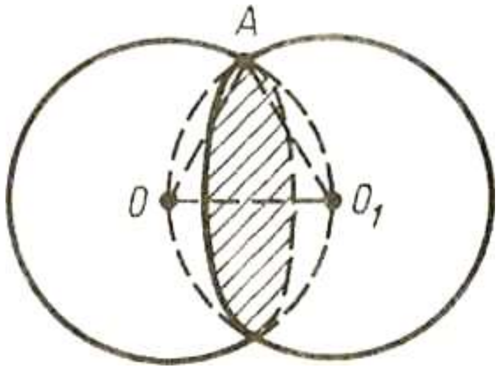
437-сурет







Тема 9.7.: Шар, сфера. Поверхность сферы.



План занятия.

1. Определение шара и сферы.
2. Касательная плоскость к сфере.
3. Площадь сферы.

Определение: Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.
Данная точка называется центром сферы (точка О), а данное расстояние- радиусом сферы.
Отрезок, соединяющий две точки сферы, и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.
Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара.

Касательная плоскость к сфере.
Рассмотрим более подробно случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка- точка касания плоскости и сферы.
Теорема: Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.
Доказательство: Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центорм О в точке А. Докажем, что OA⊥α.
Предположим, что это не так. Тогда радиус ОА является наклонной к плоскости α и следовательно, расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α- касательная, т.е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что OA⊥α. Теорема доказана.
Обратная теорема: Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Площадь сферы.
В отличие от боковой поверхности цилиндра или конуса сферу нельзя развернуть нана плоскость, и следовательно, для нее не пригоден способ определения и вычисления площади поверхности с помощью развертки. Для определения площади сферы воспользуемся понятием описанного многогранника. Многогранник называется описанным около сферы (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется вписанной в многогранник.
Пусть описанный около сферы многогранник имеет n граней. Будем неограниченно увеличивать n таким, образом, чтобы наибольший размер каждой грани описанных многогранников стремился к нулю. За площадь сферы примем предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.

$$S = 4\pi R^2$$

Решить задачи

Задача №1. Город N находится на 60^0 северной широты. Какой путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли ≈ 6000км. Ответ≈785км.

Задача №2. В шаре проведены по одну сторону центра два параллельных сечения. Их площади 49πдм^{2}и 4πм^2, расстояние между ними 9дм. Определить поверхность шара. Ответ 25πм^2.

Домашнее задание

1) Выучить конспект.
2) Решить задачи:

а) Шар радиус которого 41дм пересечен плоскостью на расстоянии 9дм от центра. Определить Sсечения. Ответ 16π≈50м^2.

б) Площадь большого круга равна 1м^2. Найти S шара. Ответ 4м^2.

в) Радиус шара 20см. через конец радиуса под углом 60^0 к нему проведена плоскость. Определить S сечения. Ответ 100π м^2.

<u>Урок № 83. Тема 9.8.: Решение задач.</u>

План занятия.

Определение цилиндра, его элементы, сечения.
Определение конуса, его элементы, сечения.

Задача. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12см и наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найти Sб., Sполн. цилиндра. Ответ $36\pi\sqrt{3}$ñì ^{2}; $18\pi(2\sqrt{3}+1)$ñì ^{2}

Задача. Радиусы оснований усеченного конуса 8см и 4см, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найти Sбок. и S осевого сечения.

Ответ Sб.=96πсм^2. Sсеч.= $68\sqrt{3}$ñì ^{2}

Контрольные вопросы:

1. Определение шара
2. В чем отличие шара от сферы?
3. Формула нахождения площади поверхности шара, сферы.

<u>Тема 10.1.: Объем призмы.</u>

План занятия.

1. Общие представления об объеме.
2. Основные свойства объема.

1. Каждая фигура имеет определенный объем, выраженный неотрицательным числом.
2. Равные фигуры имеют равные объемы.
3. Если фигура разбита на несколько частей, не имеющих общих точек, то ее объем равен сумме объемов частей.

Объем величина, такая как длина отрезка, площадь, величина угла. Объем можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. Единицы объема: кубический см (см^3) – объем единичного куба с ребром в 1см; аналогично кубический дециметр (дм^3); кубическим метр (м^3).

Теорема. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. **V=*авс***

Теорема. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Vпризмы = Sосн.h

Решение задачи

Задача №1. В правильной четырехугольной призме диагональ равна 12см и составляет с плоскостью основания угол 45^0. Определить объем. Ответ $108\sqrt{3}\text{ñì}^{3}$

Задача №2. В правильной шестиугольной призме сторона основания равна 4см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60^0. Определить объем.

Ответ 288см^3.

Домашнее задание

1) Конспект.

Задача №1. Объем куба 8м^3. Найти Sполн. Ответ 24м^2.

Задача №2. В правильной треугольной призме сторона основания 6см, а диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол 30^0. Определить объем.

Ответ 18см^3.

Задача №3. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15м, 50м, 36м. Найти ребро равновеликого ему куба. Ответ 26м.

<u>Тема 10.2: Объем пирамиды, объем усеченной пирамиды.</u>

План занятия.

1.Дать определение формулы объема пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\text{Sîñí}\ .\cdot h$$

2.Показать модели различных усеченных пирамид и написать формулу объема усеченной пирамиды. $V_{\text{óñïèð}\ .}=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$

где h – высота усеченной пирамиды.

S_1 – площадь нижнего основания.

S_2 – площадь верхнего основания.

Задача №1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды 6см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45^0. Определить объем призмы.

Ответ V=18см^3.

Задача №2. Основание пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9м и 12м. Каждое из боковых ребер равно 12,5м. Найти объем. Ответ 360м^3.

Задача №3. Высота усеченной пирамиды равна 15м, объем равен 475м^3. Площади оснований относятся как 4:9. Определить площади этих оснований. (20м^2, 45м^2)

Задача №4. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде V=430м^3 h=10м. Сторона одного основания 8м. Определить сторону другого основания. (5м).

Задача №3. Определить объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, если стороны оснований *а* и *в*, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол 30^0.

$$V=\frac{1}{2}(\grave{a}^3-\hat{a}^3)$$

Домашнее задание.

1) Выучить конспект.

Задача №1. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3м, боковое ребро 5м. Найти объем. Ответ V=32м^3.

Задача №2. Апофема треугольной правильной пирамиды равна 10м. Высота 8м. Определить объем. Ответ V=$288\sqrt{3}ì^{3}$

Задача. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3м, стороны оснований 5м и 1м. Определить объем. ($10\frac{1}{3}ì^{3}$)

<u>Тема 10.3.: Решение задач.</u>

План занятия.

1) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2см, боковое ребро 6см. Определить объем. Ответ $\frac{2}{3}\sqrt{26}ñì^{3}$

2) Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 3см, боковое ребро 10см. Определить объем. Ответ 90см^3.

3) В правильной четырехугольной пирамиде высота 6м, боковое ребро 10м. Найти объем. Ответ 256м^3.

4) Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и каждое равно 3см. определить объем. Ответ $\frac{9}{2}ñì^{3}$

Решить в аудитории задачи

Задача №1. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно $\sqrt{3}ñì$ и наклонено к плоскости основания под углом 60^0. Определить объем пирамиды. Ответ $V=\frac{9\sqrt{3}}{32}ñì^{3}$

Задача №2. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 9см, а стороны оснований 7см и 5см. Ответ 109см^3.

Домашнее задание

Задача №1. В правильной треугольной пирамиде сторона равна $\sqrt{3}ñì$ и наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Определить объем пирамиды. Ответ $\frac{9\sqrt{3}}{8}ñì^{3}$

Задача №2. В треугольной прямой призме стороны основания 37см, 13см, 30ми. Площадь боковой поверхности 480см^2. Найти объем призмы. Ответ 1080см^3.

<u>Тема 10.4.: Объем цилиндра.</u>

формула объема цилиндра.

$$\mathbf{V = SH = \pi}R^2\ \mathbf{H}.$$

Решение задачи

Задача №1. Один цилиндр имеет высоту 2,4м и α=4м, другой h=1,2м, d=2м. Найти отношение их объемов. Ответ 8м^3.

1) Объем тетраэдра, если *a* (сторона основания) равна 1см, h=6см. Ответ $6\sqrt{3}ñì$

2) Объем правильной четырехугольной призмы, если диагональ призмы $\sqrt{2}ñì$ и наклонена к плоскости основания под углом 45^0. Ответ 1см^3.

H=8см.	H=12см.
R=6см.	α=30^0
Sбок.=?	ℓ=?

Задача №3. 25м медной проволоки весит 100,7г. Найти диаметр проволоки. (плотность меди 8,9). Ответ ≈0,75мм.

3. **Задача №4.** В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед диагональ которого 24см и составляет угол 60^0. Найти объем цилиндра. Ответ $432\pi см^3$.

4. Задача №5. Площадь боковой поверхности цилиндра $16\pi см^2$, длина окружности 4πсм. Найти объем. Ответ $16\pi см^3$.

Тема 10.6: Объем конуса, усеченного конуса.

План занятия.

1. **Формула нахождения объема конуса, усеченного конуса.**
2. **Решение задач на применение формул.**

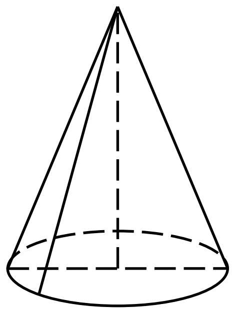
а) Решение задач №1, 2, 3.

б) Опрос по моделям (определение геометрических тел, их элементов, формулы Sбок., Sполн., V)

R-радиус основания конуса***, H***-высота:

$$\mathbf{V = SH = \pi} R^2 \mathbf{H}.$$

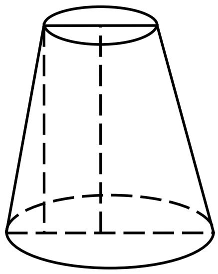
$$\mathbf{V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi} R^2 \mathbf{H}.$$



R, r- радиусы верхнего и нижнего оснавания усеченного конуса, б ***h***-высота:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi} h(R^2 + Rr + r^2)$$

Решить задачи



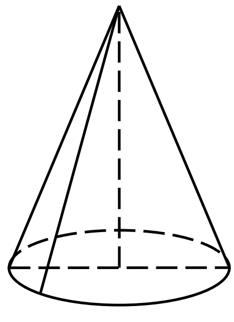
Задача №1. Площадь основания конуса $9\pi см^2$. Полная поверхность $24\pi см^2$. Определить V конуса.

Задача №2. Высота конуса равна 15м. Объем равен $320\pi м^3$. Определить Sполн.

Ответ $200\pi м^2$.

Задача №3. Высота усеченного конуса равна 3см, радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом 45^0. Найти объем.

Ответ $63\pi см^3$.



Домашнее задание

Задача №1. Радиусы оснований усеченного конуса 20см и 10см. Образующая наклонная к плоскости основания под углом 45^0. Определить объем. Ответ $\frac{700\pi}{3}$ ì 3

Задача №2. Объем усеченного конуса равен $584 см^3$. Радиусы оснований 10см и 7см. Определить высоту. Ответ 8см.

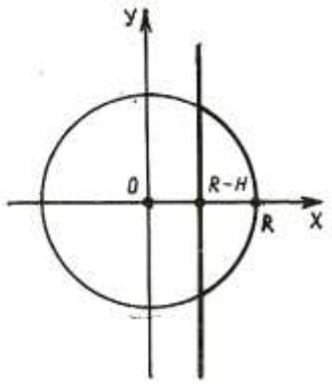
Урок № 90. Тема 10.7.: Объем шара.

План занятия.
1. **Формула нахождения объема шара.**
2. **Решение задач**
3.

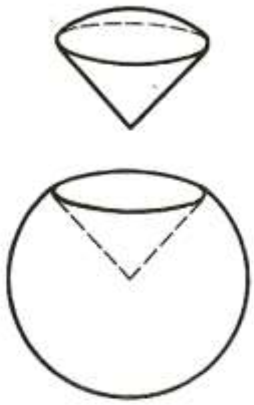
Дать определение формулы объема шара.

Vш.= $\frac{4}{3}\pi R^3$

$$V=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-H}^{R}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$



493-сурет



494-сурет

Решить задачи

Задача №1. Нужно отлить цинковый шар с диаметром в 3см. Имеются шарики с диаметром в 5мм. Сколько таких шариков нужно взять? Ответ 216.

Задача №2. Внешний диаметр полого шара 18см, толщина стенок 3см. Найти объем стенок. Ответ ≈2148см^3.

Задача №2. Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено? Ответ 47%.

Домашнее задание

1) Выучить формулу объема шара.

2) Решить задачи

Задача №1. Радиусы трех шаров 3см, 4см и 5см. Определить радиус шара, объем которого равен сумме их объемов. Ответ 6см.

Задача №2. Объем стенок полого шара равен 876πсм^3, а толщина стенок 3см. Определить радиусы его поверхностей наружной и внутренней. Ответ 10см и 7см.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определения
   -цилиндру, конусу, усеченному конусу;
   -призме, параллелепипеду
   -пирамиде, усеченной пирамиде
   -шару, сфере
2. По каким формулам вычисляются площади
   -боковой и полной поверхности цилиндра, конуса, усеченного конуса;
   -боковой и полной поверхности призмы, параллелепипеда
   - боковой и полной поверхности пирамиды, усеченной пирамиды?
   -сферы

3. По каким формулам вычисляются объемы
- цилиндра, конуса, усеченного конуса
- призмы, параллелепипеда, куба
- пирамиды, усеченной пирамиды
-шара

Урок № 91. Тема 11.1. Элементы теории вероятности, элементы математической статистики.

План.

1. Теория вероятностей.
2. Элементы комбинаторики.
3. Решение заданий.
4. Ответы на вопросы.
5. Домашнее задание.
6.

1.Теория вероятностей – *математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.* Под случайным явлениями понимаются явления с неопределенным исходом, происходящие при неоднократном воспроизведении определенного комплекса условий.

Очевидно, что в природе, технике и экономике нет явлений, в которых не присутствовали бы элементы случайности. Существуют два подхода к изучению этих явлений. Один из них – классический состоит в том, что выделяются основные факторы, определяющие данное явление, а влиянием множества остальных, второстепенных, факторов, приводящих к случайным отклонениям его результат, пренебрегают. Таким образом выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению, позволяющая однозначно предсказать по заданным условиям. Этот подход часто используется в естественных науках.

При исследовании многих явлений и прежде всего социально-экономических такой подход неприемлем. В этих явлениях необходимо учитывать не только основные факторы, но и множество второстепенных, приводящих к случайным возмущениям и искажениям результат, т.е. вносящих в него элемент неопределенности. Поэтому другой подход к изучению явлений состоит в том, что элемент неопределенности, свойственный случайным явлениям и обусловленный второстепенными факторами, требует специальных методов их изучения. Разработкой таких методов, изучением специфических закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях и занимается теория вероятностей.

2.ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Во многих задачах классической теории вероятностей используется *комбинаторика*, т.е. раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил – правила умножения и правила сложения.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первыйобъект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип распространяется на случай трех и более объектов.

Правило сложения: если некоторый объект a можно выбрать n_1 способами, а объект b можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов (a или b) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Существуют две схемы выбора m элементов из заданного множества: *без возвращения*, когда выбранные элементы не возвращаются в исходное множество, и с *возвращением*, когда выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращение отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвращений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Размещением из n элементов по k элементов ($0 \le k \le n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Два размещения различны, если они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k обозначаются символом A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... n$, причем $1!=1$, $0!=1$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Таким образом, указать ту или иную перестановку данного множества из n элементов значит выбрать определенный порядок этих элементов. Поэтому любые две перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Сочетанием из n элементов по k ($0 \le k \le n$) называется любое подмножество данного множества, которое содержит k элементов.

Любые два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т.е. отличаются только составом элементов). Число сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для чисел C_n^k (они называются *биномиальными коэффициентами*) справедливы следующие тождества:

$$C_n^k = \tilde{N}_n^{n-k} \text{ (}\textit{правило симметрии}\text{)},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \text{ (}\textit{правило Паскаля}\text{)},$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Схема выбора с возвращением

Если при упорядоченной выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой *размещения с повторениями*. Число всех размещений с повторениями из n элементов по k обозначается символом $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по несколько раз, т.е. повторяться), то полученные выборки есть *сочетания с повторениями*. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается символом $\overline{\tilde{N}}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{\tilde{N}}_n^k = \tilde{N}_{n+k-1}^k.$$

Пусть в множестве из n элементов есть k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется n_1 раз, 2-й - n_2 раз, … , k-й - n_k раз, причем

$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями*.

Число перестановок с повторениями (иногда говорит о числе разбиений множества) из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! ... n_k!}.$$

Формула Ньютона записывается в виде

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Общий член разложения вычисляется по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

1. Составить всевозможные перестановки из элементов множества, если:
1) A=$\{1\}$*; 2) A=*$\{5,6\}$*; 3)* $\{a,b,c\}$.

3. Решение: *1) (1); P_1=1;*

*2) (5,6); (6,5); P_2=1*2=2;*

*3) (a,b,c); (a, c, b);(b, a, c);(b, c, a); (c, a, b);(c, b, a); P_3 =1*2*3 =6.*

2. Составьте всевозможные перестановки из элементов множества
$A = \{a,b,c,d\}$

(ответ: $P_4 = 24$)

3. Вычислить значения выражений:
1) 5!+6!;

2) $\frac{52!}{50!}$.

Решение: 1) *5!+6! =5*4*3*2*1+6*5*4*3*2*1=120+720=840;*

2) $\frac{52!}{50!} = \frac{52*51*50*49*...*1}{50*49*...1} = 52*51 = 2652.$

4. Вычислите значения следующих выражений:
1) $\frac{10!-8!}{89}$;

2) $\dfrac{5!+6!}{4!}$;

3) $6!(7!-3!)$.

(ответ: 1) 40320; 2) 35; 3) 3 624 480)

5. Докажите тождества:

1) $\dfrac{(m+4)!}{m!}=(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$;

2) $\dfrac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)\dots(n-m+2)(n-m+1), n>m$;

3) $\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!}=(n-2)(n-3)$.

6. Сократите дроби:

1) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$;

2) $\dfrac{(n-3)!}{n!}$;

3) $\dfrac{2m(2m-1)}{(2m)!}$.

(ответ: 1) $n(n-1)$; 2) $1/(n(n-1)(n-2))$; 3) $1/(2m-2)!$)

7. Выполите действия:

1) $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}$;

2) $\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}$;

3) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n-3)!}$.

(ответ: 1) $(n+2)/(n-1)!$; 2) $-n/(n+1)!$; 3) $n(n-1)(n-2)/(n-5)!$)

Вопросы:

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Элементы комбинаторики.
3.

Урок № 92. Тема 11.2. Сложение и умножение вероятностей.
План.

1. **Теоремы сложения и умножения вероятностей**
2. **Решение задач.**

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1: *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Определение. Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется **условной вероятностью** события В.

$$\boxed{P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)}$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)}$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности.

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$\boxed{P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})}$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n}$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$.

1. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой и второй партий извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей.

Решение. Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из первой партии, равна $p_1 = \frac{9}{12}$, для второй детали, извлеченной из первой партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_2 = \frac{8}{11}$.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из второй партии, равна $p_3 = \frac{11}{15}$, для второй детали, извлеченной из второй партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_4 = \frac{10}{14}$.

Вероятность того, что среди четырех извлеченных деталей нет бракованных, равна:

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0{,}2857$$

2. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся знает ответы только на 35 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос одного билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

Решение. В общей сложности имеется 40 вопросов (по 2 в каждом из 20 билетов). Вероятность того, что выпадает вопрос, на который ответ известен, очевидно, равна $\frac{35}{40}$.

Для того чтобы сдать экзамен, требуется совершение одного из трех событий:

1) Событие А – ответили на первый вопрос (вероятность $\frac{35}{40}$) и ответили на второй вопрос (вероятность $\frac{34}{39}$). Т.к. после успешного ответа на первый вопрос остается еще 39 вопросов, на 34 из которых ответы известны.

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0{,}7628$$

2) Событие В – на первый вопрос ответили (вероятность $\frac{35}{40}$), на второй – нет (вероятность $\frac{5}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$).

$$P(B)=\frac{35}{40}\cdot\frac{5}{39}\cdot\frac{34}{38}=0{,}1004$$

3) Событие С – на первый вопрос не ответили (вероятность $\frac{5}{40}$), на второй – ответили (вероятность $\frac{35}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$).

$$P(C)=\frac{5}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}=0{,}1004$$

Вероятность того, что при заданных условиях экзамен будет сдан равна:

$$P=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}9636$$

Домашнее задание:

Решите задачу: В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

(ответ: $P=\frac{5}{6}$)

Урок 93 .Тема 11.3. Случайная величина.

План.

1. **Случайные величины**
2. **Закон распределения дискретной случайной величины**
3. **Биноминальное распределение**

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

<u>Определение.</u> Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

<u>Определение.</u> Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

<u>Определение.</u> Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Закон распределения дискретной случайной величины

__Определение.__ Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

1. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Решение. Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти найдены по формуле Бернулли и равны соответственно:

$$P_{5,5} = 0{,}01024, \quad P_{4,5} = 0{,}0768, \quad P_{3,5} = 0{,}2304$$

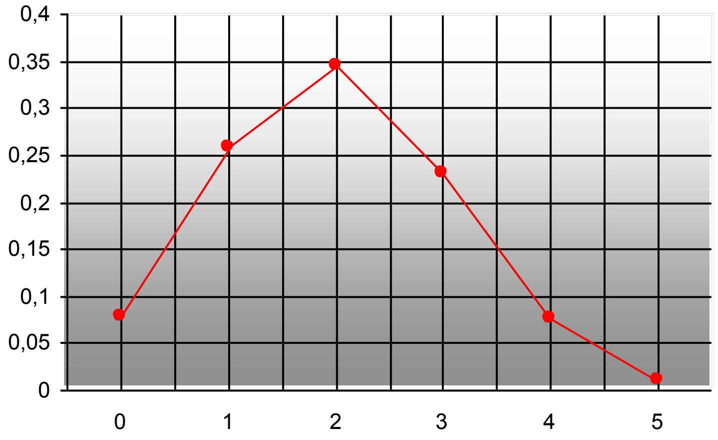
Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!\cdot 5!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778$$

Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей.



При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности

Биноминальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...}$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется **биноминальным**.

2. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины Х – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Решение. Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1)=\frac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

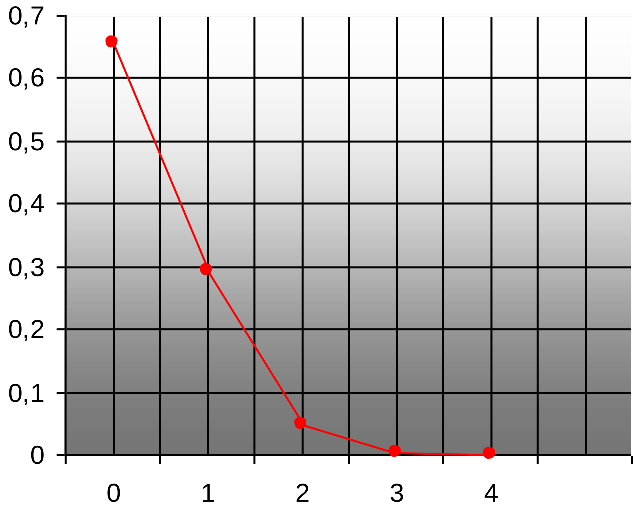
$$P_4(2)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486$$

4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3)=\frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3\cdot 0{,}9^1=0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4)=\frac{4!}{4!\cdot 0!}0{,}1^4\cdot 0{,}9^0=0{,}0001$$



Построим многоугольник распределения.

3. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

Решение. Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна:

$$P_2(2)=\frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^2\cdot 0{,}75^0=0{,}0625$$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375$$

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625$$

Урок 94. Тема 11.4. Элементы выборочного метода.
План.

1. **Числовые характеристики дискретных случайных величин**
2. **Определение дисперсии.**

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

2. Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события А в которых равна p.

<u>Теорема.</u> *Математическое ожидание M(X) числа появления события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

Однако математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Это отклонение равно разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием. При этом математическое ожидание отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль.

<u>Определение.</u> Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

3. **Вычисление дисперсии**

<u>Теорема.</u> *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

4. **Свойства дисперсии**

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

<u>Теорема.</u> *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.*

$$\boxed{D(X) = npq}$$

5. **Среднее квадратическое отклонение**

<u>Определение.</u> Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

Теорема. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$

8. Для рассмотренного выше примера закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

Тогда

[X-M(X)]^2	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375$$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Поэтому применяется другой способ.

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375$$

9. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение. Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна *p* = 0,96.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4;$

Контрольные вопросы:

1. Определения событий и вероятности.
2. Формулы для вычисления вероятности
3. Формулы суммы вероятностей совместных и несовместных событий.
4. Формулы произведения вероятностей зависимых и независимых событий.
5. Понятие случайной величины.
6. Закон распределения дискретной случайной величины.
7. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Литература.

1. М.И. Башмаков. «Алгебра и начала анализа 10-11 кл» (М., Просвещение, 1991г)
2. Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. « Алгебра и начала анализа, 11кл» (М., Просвещение, 1992г)
3. В.М. Клопский, З.А.Скопец, М.И. Ягодовский «Геометрия 9-10 кл»
4. Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов «Геометрия 10-11 кл»
5. Гусев А., Қагазбаева,... Геометрия 10 кл.
6. Математика для техникумов. Алгебра и начало анализа. (под. ред. Г.Н. Яковлева. I часть М. 1987г).
7. Математика для техникумов. Алгебра и начало анализа.(под. ред. Г.Н. Яковлева. II часть М. 1988г).
8. Математика для техникумов. Геометрия.(под. ред. Г.Н. Яковлева. М. 1987г).
9. Апанасов П.Т., Орлов М.И. Сборник задач по математике. М. 1987г.