КГКП «Геологоразведочный колледж» УО ВКО А

Опорные конспекты
по предмету «Математика»
для специальностей:

0701000 «Геологическая съемка, поиск и разведка месторождений полезных ископаемых»
0702000 «Технология и техника разведки месторождений полезных ископаемых»
0703000 «Гидрогеология и инженерная геология»
0704000 «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»
080100 «Бурение нефтяных и газовых скважин и технология буровых работ»

Подготовила: Куттыгожина А. С.
Рассмотрено на собрании
Общетехнической ПЦК ГРК
Протокол от «___»____________2018г
Председатель Общетехнической ПЦК:
Беспалова С.В.____________________

г.Семей
2018-2019 уч.год

Базовые (опорные) конспекты составлены в соответствии с рабочим учебным планом, утвержденным в 2018 г и рабочими программами, утвержденными в 2018г.

Зам.директора по УР________________________________ Минаева.Н.Т

Общее количество часов: 188

I семестр _______100_______
II семестр_______88________

Количество обязательных контрольных работ

__1___I семестр
__2___II семестр

Итоговая контрольная работа: **экзамен**

Содержание:

Тематический план и содержание дисциплины.
Тематический план

№ занятия	Календар. сроки	Наименование разделов и тем	Количество учебного времени при

	изучения		очной форме обучения Повышенный уровень
1	2	3	4
	I раздел	**Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.**	**12**
2	Тема 1.1	Введение, задачи предмета	2
3	Тема 1.2.	Уравнения, корень уравнения. Равносильные уравнения. Линейные квадратные уравнения, дробнорациональные уравнения.	2
4	Тема 1.3.	Неравенства и их свойства. Системы уравнений и неравенств. Способы их решений. Геометрическая интерпретация	4
5	Тема 1.4.	Определители II, III порядков. Решение систем двух, трех линейных уравнений с двумя тремя неизвестными по формулам Крамера	4
	II раздел	**Функции, их свойства и графики.**	**8**
6	Тема 2.1.	Числовая функция. Графики. Способы задания функций. График функций	2
7	Тема 2.2.	Простейшие преобразования графиков функций	2
8	Тема 2.3.	Обратная функция. Свойства функций: монотонность, четность, периодичность	2
9	Тема 2.4.	Решение задач	2
	III раздел	**Показательная, логарифмическая, степенная функции**	**22**
10	Тема 3.1.	Степень с рациональным показателем и ее свойства	2
11	Тема 3.2.	Степенная функция, её свойства и график	2
12	Тема 3.3.	Показательная функция, ее график и свойства	2
13	Тема 3.4.	Решение простейших и сводящихся к ним показательных уравнений и неравенств.	4
14	Тема 3.5.	Логарифмы. Десятичные и натуральные логарифмы.	2
15	Тема 3.6.	Логарифмическая функция, её свойства и график.	2
16	Тема 3.7.	Решение логарифмических уравнений и неравенств	4

17	Тема 3.8.	Решение упражнений. Контрольная работа.	4
	IV раздел	**Тригонометрические функции**	**26**
18	Тема 4.1.	Тригонометрические функции числового аргумента. Вычисление значений тригонометрических выражений	4
19	Тема 4.2.	Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций. Тождественные преобразования тригонометрических выражений	4
20	Тема 4.3.	Свойства и графики тригонометрических функций	2
21	Тема 4.4.	Обратные тригонометрические функции	2
22	Тема 4.5.	Простейшие тригонометрические уравнения и их решение	2
23	Тема 4.6.	Решение уравнений, приводимых к одной функций	2
24	Тема 4.7.	Решение однородных тригонометрических уравнений	4
25	Тема 4.8.	Решение различных типов тригонометрических уравнений	2
26	Тема 4.9.	Решение простейших тригонометрических неравенств	4
	V раздел	**Производная и ее приложения.**	**40**
27	Тема 5.1.	Приращение функции	2
28	Тема 5.2.	Предел функции в точке. Основные свойства предела. Непрерывность функции в точке и не промежутке. Свойства непрерывных функций.	4
29	Тема 5.3.	Теоремы о пределах. Предел Функций на бесконечность.	2
30	Тема 5.4.	Производная, её геометрический и физический смысл	2
31	Тема 5.5.	Правила дифференцирования сложной функций	2
32	Тема 5.6.	Производная суммы, произведения, частного	2
33	Тема 5.7.	Производная степенной функций с натуральным показателем. Производная синуса и косинуса	2
34	Тема 5.8.	Производные степенной и показательной функций	2
35	Тема 5.9.	Производные логарифмических функций	2
36	Тема 5.10	Производные обратных тригонометрических функций. Контрольная работа	4
37	Тема 5.11.	Вторая производная и ее физический смысл	2
38	Тема 5.12	Признаки возрастания, убывания функций	2
39	Тема 5.13	Экстремум функций. Исследование функций на экстремум по I производной	2

40	Тема 5.14.	Выпуклость, вогнутость графика функции. Точка перегиба	2
41	Тема 5.15.	Наибольшее, наименьшее значения функции на промежутке. Задачи на максимум, минимум функции	2
42	Тема 5.16.	Применение производной к построению графиков	2
43	Тема 5.17	Дифференциал функции и его геометрический смысл. Применения дифференциала к приближенных вычислениям.	2
44	Тема 5.18	Решение задач.	2
	VI раздел	**Прямые и плоскости в пространстве**	**18**
45	**Тема 6.1.**	Аксиомы стереометрии и следствия из них	2
46	Тема 6.2.	Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости	2
47	Тема 6.3.	Параллельность двух плоскостей	2
48	Тема 6.4.	Параллельное проецирование и его свойства	2
49	Тема 6.5.	Перпендикулярность прямой и плоскости	2
50	Тема 6.6.	Перпендикуляр и наклонные, угол между прямой и плоскостью. Теорема о трех перпендикулярах	2
51	Тема 6.7.	Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей.	4
52	Тема 6.8.	Решение задач	2
	VII раздел	**Векторы и координаты**	**8**
53	**Тема 7.1.**	Векторы на плоскости. Действия над векторами. Координаты вектора. Разложение вектора на составляющие.	2
54	**Тема 7.2.**	Прямоугольные координаты на плоскости и пространстве. Действия над векторами, заданными своими координатами. Длина вектора, угол между векторами.	2
55	Тема 7.3.	Уравнение прямой, проходящей через одну, две точки. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности, перпендикулярности прямых.	2
56	Тема 7.4.	Решение задач	2
	VIII раздел	**Интеграл и его приложения**	**12**
57	Тема 8.1.	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.	4
58	Тема 8.2.	Определенный интеграл и его геометрический смысл	2
59	Тема 8.3.	Основные свойства и вычисление определенного интеграла	2

60	Тема 8.4.	Вычисление определенного интеграла	2
61	Тема 8.5.	Вычисление площади фигур с помощью определенного интеграла.	2
	IX раздел	**Геометрические тела поверхности**	**18**
62	Тема 9.1.	Многогранники. Призма. Площадь боковой и полной поверхности.	2
63	Тема 9.2.	Параллелепипед, его виды и свойства.	2
64	**Тема 9.3.**	Пирамида. Свойства параллельных сечений в пирамиде. Площади боковой и полной поверхности.	2
65	Тема 9.4.	Усеченная пирамида. Площади боковой и полной поверхностей.	4
66	Тема 9.5.	Цилиндр, конус, усеченный конус. Площади боковой и полной поверхностей	2
67	Тема 9.6.	Осевые сечения цилиндра, конуса, усеченного конуса	2
68	Тема 9.7.	Шар. Площадь поверхности шара.	2
69	Тема 9.8.	Решение задач	2
	X раздел	**Объем геометрических тел**	**16**
70	Тема 10.1.	Объем призмы	2
71	Тема 10.2.	Объем пирамиды, усеченной пирамиды	2
72	Тема 10.3.	Решение задач	2
73	Тема 10.4.	Объем цилиндра	2
74	Тема 10.5.	Объем конуса	2
75	Тема 10.6.	Объем усеченного конуса	2
76	Тема 10.7.	Объем шара и его частей	2
77	Тема 10.8.	Решение задач	2
	XI раздел	**Теория вероятности и элементы математической статистики**	**8**
78	Тема 11.1.	Элементы теории вероятности, элементы математической статистики	2
79	Тема 11.2.	Сложение и умножение вероятностей	2
80	Тема 11.3.	Случайная величина	2

81	Тема 11.4.	Элементы выборочного метода	2
Всего по дисциплине			**188**

Содержание дисциплины:

I Раздел. Уравнения и неравенства. Линейные системы уравнений и неравенств.

Раздел I. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.

Урок № 1. Тема 1.1.Введение, задачи предмета.

План.

1. Введение в предмет.
2. Цели и задачи.

Математика за 2500 лет своего существования накопила богатейший инструмент для исследования окружающего нас мира. Однако, как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А.Н.Крылов, человек обращается к математике «не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами. Ему прежде всего нужно ознакомиться со столетиями испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть».

Как мы познаем окружающий нас реальный мир? Всем нам приходится полагаться на свидетельства наших органов чувств — слуха, зрения, осязания, вкуса, обоняния,— когда мы решаем повседневные проблемы или получаем от чего-то удовольствие. Чувственные восприятия многое говорят нам о реальном мире, но в основном наши органы чувств слишком грубы. Декарт (быть может, с излишней резкостью) назвал ощущения обманом наших чувств. Правда, такие приборы и инструменты для науч-ных исследований, как, например, телескоп, существенно рас-ширяют границы доступного нашему чувственному восприятию, но лишь в определенных пределах.

Многие явления окружающего нас реального мира вообще скрыты от наших органов чувств. Они ничего не говорят нам о том, что Земля вращается вокруг своей оси и обращается вокруг Солнца. Они умалчивают о природе силы, удерживающей планеты на их орбитах, об электромагнитных волнах, позволяющих нам принимать радио- и телепередачи за сотни и тысячи кило-метров от передающей станции.

В XVII в. Блез Паскаль горько сетовал на беспомощность человека. Ныне созданное нашими усилиями всемогущее ору-жие — математика — позволяет познавать многое в окружающем нас реальном мире и овладевать им. В 1900 г., обращаясь к участникам II Международного конгресса математиков, один из величайших представителей современной математической науки Давид Гильберт заявил: «Математика — основа всего точного естествознания» ([1], с. 69). С полным основанием можно доба-вить, что только математика позволила получить то знание о разнообразных жизненно важных явлениях, которыми мы ныне располагаем. Многие науки по существу представляют собой свод математических теорий, скупо приправленных физическими фактами.

Вопреки впечатлению, которое обычно складывается у тех, кому довелось прослушать курс математики в стенах учебного заведения, математика — это не просто набор более или менее хитроумных приемов для решения задач. Математика открывает нам немало такого, о чем мы не знали и даже не подозревали, хотя речь идет о явлениях весьма существенных, и нередко ее выводы противоречат нашему чувственному восприятию. Математика — суть нашего знания о реальном мире. Она не только выходит за пределы чувственного восприятия, но и оказывает на него воздействие.

Урок № 2.

1.2. Уравнения и их свойства. Линейные уравнения, квадратичные уравнения и приводимые к ним. Дробно- рациональные уравнения.

План.

1. **Уравнения и их свойства.**
2. **Линейные уравнения, квадратичные уравнения и приводимые к ним.**
3. **Дробно- рациональные уравнения.**

$ax+b=0,\left(x=\frac{-b}{a}, a\neq 0\right)$ – линейное уравнение I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ – уравнение II степени с одной переменной

$$\boxed{D = b^2 - 4ac; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Решить уравнение – значит найти множество его корней или доказать, что их нет. это множество называют решением уравнения.
Два уравнения называются равносильными если решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого уравнения и наоборот.
Уравнения $x = 0$ и $x\left(x^2 + 3\right) = 0$ равносильны, так как оба имеют единственный корень $x = 0$.

Уравнения $x^2 - x = 0$ и $\frac{x^2 + 2}{x} = \frac{x+1}{x}$ – неравносильны, так как $x = 0$ является корнем первого уравнения, но не удовлетворяет второму уравнению.

Уравнения $2x - 10 = 0$ и $\left(2x - 10\right)\left(x + 1\right) = 0$ неравносильны, так как корень первого уравнения $x = 5$, а второе уравнение кроме этого корня имеет еще корень $x = -1$, который не является корнем первого уравнения.
Решим уравнения:

$a)\left(3x+1\right)^2 + \left(4x-1\right)^2 = \left(5x-2\right)^2$

раскроем скобки, применяя формулы сокращенного умножения $\left(a+b\right)^2$ и $\left(a-b\right)^2$

$9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 - 8x + 1 = 25x^2 - 20x + 4.$

$9x^2 + 6x + 1 + 16x^2 - 8x + 1 - 25x^2 + 20x - 4 = 0.$

приведем подобные члены, получим

$18x - 2 = 0$ $\quad x = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ $\quad$ Ответ: $x = \frac{1}{9}$ – корень уравнения.

$18x = 2$

$б)\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} = \frac{8}{x^2 - 4}$ разложим $x^2 - 4$ на множители

перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x}{x-2} - \frac{7}{x+2} - \frac{8}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)} = 0$$

$$\frac{x\left(x+2\right) - 7\left(x-2\right) - 8}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)} = 0$$

$$\frac{x^2 + 2x - 7x + 14 - 8}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)} = 0$$

дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т. е.

$\left(x+2\right)\left(x-2\right) \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad x \neq 2; \; x \neq -2$

$x^2 - 5x + 6 = 0.$

Решаем уравнение

$D = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2};$ $\qquad$ (корни можно найти по теореме Виета)

$x_1 = 3; x_2 = 2$

Так как $x \neq 2,$ то $x_2 = 2$ – посторонний корень и решением уравнения будет $x = 3$. Ответ: $x = 3$.

$в) \, x^2 - x + 4 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$

уравнение не имеет действительных корней.

Биквадратное уравнение

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ решается сведением к квадратному уравнению с помощью введения новой переменной. пусть $x^2 = y$, тогда имеем $ay^2 + by + c = 0$ и решается квадратное уравнение относительно y.

Например.

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

$x^2 = y$

$4y^2 - 5y + 1 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$y_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{8}; \quad y_1 = 1; \; y_2 = \dfrac{1}{4}$

и тогда $x^2 = 1$ и $x^2 = \dfrac{1}{4}$, решаем эти уравнения:

$x_{1,2} = \pm 1; \quad x_{3,4} = \pm \dfrac{1}{2}$ получили четыре действительных корня. Ответ: $\pm 1; \; \pm \dfrac{1}{2}$

Решить самостоятельно:

а) $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

б) $x^4 + 9x^2 = 0$

Двучленные уравнения

а) $x^3 + 27 = 0$ уравнение третьей степени и имеет 3 корня. Как их найти? Разложим левую часть уравнения на множители.

Применяем формулу: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$x^3 + 3^3 = 0$

$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0;$ произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, т.е. $x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3$

$x^2 - 3x + 9 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27 < 0$ действительных корней нет.

т.е. уравнение имеет один действительный корень $x_1 = -3$

$б) \, x^4 - 16 = 0,$ разложим на множители $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$ имеем:

$x^2 - 4 = 0$ или $x^2 + 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$ $\quad x^2 = -4$ действительных корней нет.

$x_1 = 2; \; x_2 = -2$

Ответ: ± 2.

$в) \, x^3 - x^2 + 9x - 9 = 0,$ группируем члены

$(x^3 - x^2) + (9x - 9) = 0$ выносим общий множитель из каждой скобки

$x^2(x - 1) + 9(x - 1) = 0.$

Вынесем $(x-1)$ за скобки

$(x-1)(x^2+9)=0$ и тогда

$x-1=0$ или $x^2+9=0$

$x_1=1.$ $x^2=-9$

Ответ: 1.

1) $16x^4-1=0$

2) $x^3-64=0$

3) $x^3+x^2+4x+4=0.$

Домашнее задание.

1) $2x(3x-2)-3\left[1-(2-x)(2x+3)-\dfrac{x-3}{2}\right]=13$ (5)

2) $\dfrac{x}{a}-1:(1-\dfrac{a^2}{в^2})=1:(\dfrac{a}{в}-\dfrac{в}{a})$ $(\dfrac{aв}{a+в})$

3) $4x^2-17x-15=0$ $(\dfrac{5}{4};3)$

4) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$ $(\dfrac{2}{8};-3)$

5) $x+\sqrt{25-x^2}=7$ (3;4)

Контрольные вопросы:

1. Что такое уравнение?
2. Что такое ОДЗ?
3. Что такое решение уравнения с тремя неизвестными?
4. Приведите пример уравнения, имеющего единственное решение.
5. Какие уравнения называются равносильными?
6. Что может произойти с уравнением, если мы обе его части возведем в квадрат. Приведите примеры.

Урок № 3.

1.3 Неравенства и их свойства. Линейные системы уравнений и неравенств. Геометрическая интерпретация.

План.

1. **Неравенства и их свойства.**
2. **Линейные системы уравнений и неравенств.**
3. **Геометрическая интерпретация**

$ax\ge b;\ ax\le b;\ ax>b;\ ax<b.\ (a\ne 0)$ – неравенства I степени с одной переменной

$ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$ $(a\ne 0)$

$ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$ – неравенства II степени с одной переменной

Решить неравенство – значит найти множество значений переменной, при которых это неравенство является верным.

Два неравенства называются равносильными, если множество решений этих неравенств совпадают.

Решим неравенства

а) $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$

Перенесем все члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. общий знаменатель 10; так как знаменатель не содержит переменной, то есть сразу видно что он не равен нулю, то в дальнейшем его можно не писать (опустить).

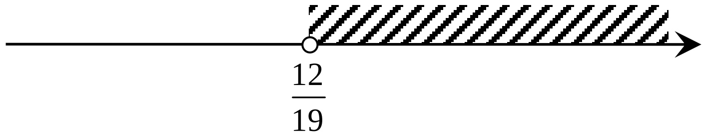
$50x-5(7x-1)+2(2x-5)-7>0$

$50x-35x+5+4x-10-7>0$

$19x-12>0$

$19x>12$

$x>\frac{12}{19}$



$x\in\left(\frac{12}{19};+\infty\right)$

б) $|5-2x|<3$

, то есть $-3<5-2x<3$

Используя свойства числовых неравенств, имеем

$-3-5<5-2x-5<3-5$

$-8<-2x<-2$; делим на (-2), знак неравенства меняется на противоположный

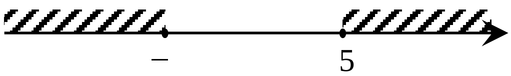
$4>x>1 \;\Leftrightarrow\; 1<x<4$

Или можно записать в виде системы неравенств

$\begin{cases}5-2x<3\\5-2x>-3\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<3-5\\-2x>-3-5\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<-2\\-2x>-8\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\x<4\end{cases}$

Ответ: $x\in(1;4)$

в) $|4x-2|\ge 5$

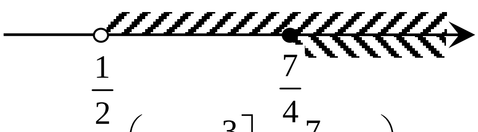


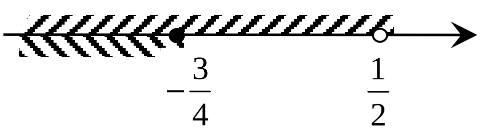
$\begin{cases}4x-2>0\\4x-2\ge 5\end{cases}$ или $\begin{cases}4x-2<0\\4x-2\le -5\end{cases}$

Решаем две системы

$\begin{cases}4x>2\\4x\ge 7\end{cases}$ $\begin{cases}4x<2\\4x\le -3\end{cases}$

$\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\x\ge\frac{7}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\x\le-\frac{3}{4}\end{cases}$





Ответ: $x\in\Big(\quad 3]\; 7 \quad +\infty\Big).$ $x\in\left[\frac{7}{4};+\infty\right)$

$x\in\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$

г) $5x-2-3.$

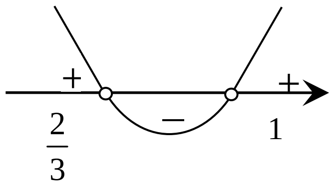
умножим на (-1)

$3x^2-5x+2<0$
квадратное неравенство
Найдем корни уравнения $3x^2-5x+2=0$
$D=25-4\cdot 6=1$

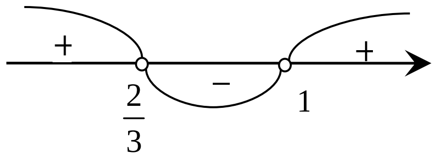
$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{6}; \quad x_1=1; x_2=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Графиком функции $y=3x^2-5x+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а точки пересечения параболы и оси ОХ $x_1=1; \quad x_2=\frac{2}{3}$

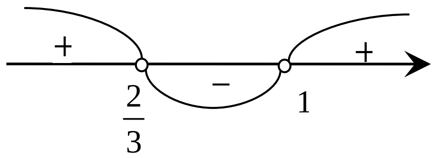
Изобразим геометрически:



или



или



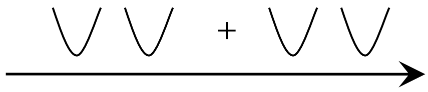
получаем три интервала, в которых определяем знак трехчлена. Так как мы решаем неравенство $3x^2-5x+2<0$, то решением неравенства будет промежуток (интервал) $x\in\left(\frac{2}{3};1\right)$

д) $4x-12x^2-3>0$

$12x^2-4x+3<0$

$12x^2-4x+3=0$

$D=16-4\cdot 12\cdot 3<0$



действительных корней нет, так как ветви параболы направлены вверх, то парабола не пересекает ось и расположена выше её, где всегда > 0,

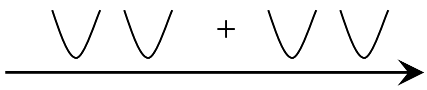
а мы решаем неравенство $12x^2-4x+3<0$, значит данное неравенство не имеет решения.

е) $-2+x-3x^2\le 0$

$3x^2-x+2\ge 0$

$3x^2-x+2=0$

$D=1-4\cdot 6=-23<0$



уравнение не имеет действительных корней, т.е. парабола не пересекает ось, ветви параболы направлены вверх,
а так как мы решаем неравенство $3x^2-x+2\ge 0$, то оно имеет множество решений, т.е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

ж) $\frac{5-2x}{3x-1}\ge 2$ – дробно–рациональное неравенство, которое может быть решено или через системы неравенств или методом интервалов. Перенесем правую часть в левую, приведем подобные члены

$$\frac{5-2x}{3x-1}-2\geq 0$$

$$\frac{5-2x-6x+2}{3x-1}\geq 0$$

$$\frac{-8x+7}{3x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x-7}{3x-1}\leq 0$$

Решим через системы неравенств. Дробь < 0, если числитель и знаменатель имеют разные знаки, т.е.

$$a)\begin{cases}8x-7\leq 0\\3x-1>0\end{cases} \qquad \textit{или} \qquad б)\begin{cases}8x-7\geq 0\\3x-1<0\end{cases}$$

(Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю).

При решении системы неравенств надо решить каждое неравенство и выбрать общие промежутки.

Решаем $\begin{cases}8x-7\leq 0\\3x-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}8x\leq 7\\3x>1\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq \dfrac{7}{8}\\x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$

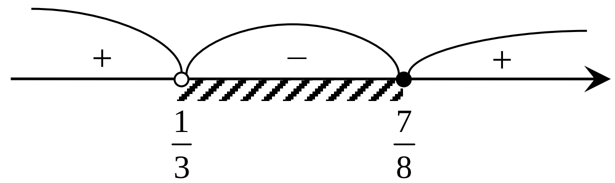
$$\frac{1}{3}<x\leq\frac{7}{8} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{8}\right]$$

$\begin{cases}8x-7\geq 0\\3x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq \dfrac{7}{8}\\x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$

система не имеет решения. Следовательно решением данного неравенства является $x\in\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{8}\right]$.

Метод интервалов позволяет ускорить процесс решения неравенства $\dfrac{8x-7}{3x-1}\leq 0$ корни $x=\dfrac{7}{8}$ и $x=\dfrac{1}{3}$.

$$x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{8}\right]$$



Метод интервалов позволяет решать не только неравенства II степени, дробно–рациональные но и более высоких степеней.

$\dfrac{x^2\cdot(3x-4)\cdot\left(x^2+4\right)}{(2x-7)(x-2)}\geq 0$ находим корни многочлена

$x^2=0 \qquad x_1=0$

$3x-4=0 \qquad x_2=\dfrac{4}{3}$

$x^2+4>0$ всегда, т.е. действительных корней нет.

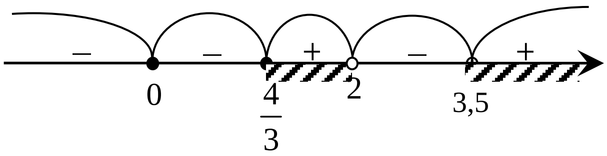
$2x-7=0 \qquad x=\dfrac{7}{2}=3,5$

$x-2=0 \qquad x=2$

Отметим корни на числовой прямой, учитываем, что числитель может быть равен нулю.

только определяем знак выражения в каждом промежутке

$(3,5;+\infty)$ $\quad x=4$ $\quad$ получаем $\quad \dfrac{16\cdot 8\cdot 20}{1\cdot 2}>0$



$(2;3,5)$ $\quad x=3$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{9\cdot 5\cdot 13}{(-1)\cdot 1}<0$

$\left[\dfrac{4}{3};2\right)$ $\quad x=1,5$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{2,25\cdot 0,5\cdot 6,25}{(-4)\cdot(-0,5)}>0$

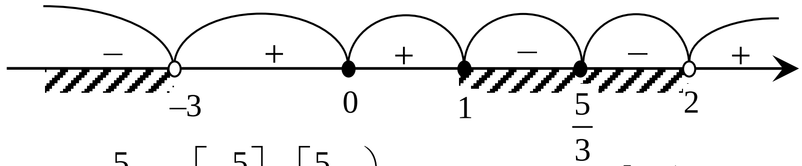
$\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$ $\quad x=1$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{1\cdot(-1)\cdot 5}{(-5)\cdot(-1)}<0$

$(-\infty;0]$ $\quad x=-1$ $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{1\cdot(-7)\cdot 15}{-9\cdot(-3)}<0$

и тогда решением неравенства является $x\in\left[\dfrac{4}{3};2\right)\cup(3,5;+\infty)$.

Можно несколько ускорить процесс определения знака в промежутках.
В промежутке больше большего корня всегда выражение больше нуля, а затем, если корень повторяется нечетное число раз (кратность его нечетная), то знаки в промежутках справа и слева от корня изменяются, а если кратность корня четная, то знак справа и слева от корня не изменяется.

$$\frac{(x-1)^3\cdot x^4\cdot(3x-5)^2}{(4x-8)\cdot(x+3)}\le 0$$



$x\in(-\infty;-3)\cup\left[1;\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{3};2\right)$, так как $x=\dfrac{5}{3}$, то $\left[1;\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{3};2\right)$ можно записать $[1;2)$

и тогда $x\in(-\infty;-3)\cup[1;2)$

Самостоятельно:

1) $|3x-7|\le 5$ $\qquad$ 2) $|2x+5|>3$ $\qquad$ 3) $-x^2+7x-10<0$

4) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x<\dfrac{x+1}{3}\\ 5-2x<1\end{cases}$ $\qquad$ 5) $\dfrac{4x-3}{7+2x}\le 3$ $\qquad$ 6) $\dfrac{(2x-1)^2\cdot(5+x^2)\cdot x^3}{(3x+5)(x-2)}\ge 0$

7) $\dfrac{(3-x)^2(x+4)^3(x+1)}{x^3\cdot(3x-4)}<0$

Контрольные вопросы:

1.Что такое неравенства?
2. Какие способы существуют решения неравенств?
3.Что такое решение системы уравнений?
4.Каким методом решают линейные системы уравнений?
5. В чем состоит метод подстановки?

Домашняя работа:

1) $x^2-6x+8>0$

2) $x^2-3x>0$

3) $\dfrac{3x+7}{2-6x}>0$ $\qquad x^2-3x>0$

4) $x^2-17x+10>0$

5) $\dfrac{x+3}{x-4} < 0$

6) $\dfrac{3-5x}{2x-5} < -3$

Урок 4

1.3 Неравенства и их свойства. Линейные системы уравнений и неравенств. Геометрическая интерпретация.

Решить неравенства:

1) $x^2+2x<0$; 2) $x^2+x-6\geqslant 0$;

3) $2x^2+x-3<0$; 4) $\dfrac{x}{x^2-1}\leqslant 0$;

5) $\dfrac{9-x^2}{4x^4-25}\geqslant 0$; 6) $(x+2)(x+3)\leqslant 6$;

7) $\dfrac{1}{x+2}\leqslant 1$; 8) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x+2}<0$;

9) $\dfrac{x}{x+1}\leqslant 2$; 10) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}\leqslant\dfrac{13}{6}$.

95. Решите неравенства:

1) $\dfrac{x^3(x-3)}{(x+1)^2}>0$; 2) $\dfrac{(2x+1)^2(x-2)}{x^5(x+1)^4}\geqslant 0$;

3) $\dfrac{x}{(x-1)^2}\leqslant 1$; 4) $x^3\leqslant x^2$;

5) $\dfrac{(x+2)^3}{x}<9(x+2)$; 6) $\dfrac{x^3-8}{x^3-1}\leqslant\dfrac{x-2}{x-1}$.

Урок №5

1.3 Определители II и III порядка. Решение системы двух линейных уравнений по формуле Крамера.

План.

1. Определители II и III порядка.

2. Решение системы двух линейных уравнений по формуле Крамера.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными в общем виде имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел, удовлетворяющая каждому уравнению этой системы. При решении такой системы могут быть использованы известные методы: 1) подстановки; 2) алгебраического сложения; 3) графически.

Но существует ещё метод решения, который особенно удобен в том случае, когда коэффициенты $a_1; a_2; b_1; b_2$ отличны от единицы или содержат буквенные выражения.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка. Вертикальные прямые – знак определителя. Обозначается определитель знаком "Δ" (дельта).
Итак определитель – это число, которое вычисляется по определенному правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$ – первый столбик (коэффициенты при переменной *x*)

$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ – второй столбик (коэффициенты при переменной *y*)

$a_1 \quad b_1$ – первая строчка (коэффициенты при переменных первого уравнения)

$a_2 \quad b_2$ – вторая строчка (коэффициенты при переменных второго уравнения)

Определители при переменных Δ_x и Δ_y получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Для нахождения значений переменных *x* и *y* используются формулы $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, которые называются формулами Крамера.
Исследуем

1) Если $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение
2) Если $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ система не имеет решения
3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ – система имеет множество решений.

Например $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-4) = 15 + 24 = 39 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 \cdot 7 = -39$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 - (-4) \cdot 1 = 35 + 4 = 39 \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1 \qquad y = \frac{-39}{39} = -1$$

Ответ: (1; –1).

<u>Основные свойства определителя</u>

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$
2. При перестановке двух столбцов (строчек) определитель меняет свой знак на противоположный.
3. Определитель, имеющий два одинаковых или пропорциональных столбца (строчки) равен нулю.
4. Общий множитель столбца (строчки) определителя можно вынести за знак определителя.

Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5x-7y=19 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 2\cdot(-7) = 15+14 = 29$ $\Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 57-(-4)\cdot(-7) = 57-28 = 29$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20-2\cdot 19 = -20-38 = -58$ Ответ: (1; –2).

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{29}{29} = 1;$ $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-58}{29} = -2$

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными следует помнить, что решение можно выполнить любым из известных методов решения, просто следует выбрать каким методом более рационально для данной системы.

3) $\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$

Решим систему всеми способами, т.е. убедимся, что результат получается одинаковый и определимся, какой из методов более рационально применим для данной системы.

1) <u>Способ подстановки</u>.

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+8y=31 \\ 10x+7y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x+\dfrac{8}{3}y=\dfrac{31}{3} \\ 10x+7y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{31}{3}-\dfrac{8}{3}y \\ 10\left(\dfrac{31}{3}-\dfrac{8}{3}y\right)+7y=5 \end{cases}$

Решаем второе уравнение относительно «*y*»: $\dfrac{310}{3}-\dfrac{80}{3}y+7y=5$, приведем к общему знаменателю и так как $3\neq 0$, то

$310-80y+21y=15$

$-59y=15-310$

$-59y=-295;$ $y=\dfrac{-295}{-59}=5$ Ответ: x = –3; y = 5.

$y=5,$ тогда $x=\dfrac{31}{3}-\dfrac{8}{3}\cdot 5=\dfrac{31}{3}-\dfrac{40}{3}=-\dfrac{9}{3}=-3$

2) Способ алгебраического сложения

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$ уравняем по модулю коэффициенты при x, для этого умножим первое уравнение на 10, а второе – на 3.

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases} \begin{vmatrix} 10 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 30x+80y=310 \\ -30x-21y=-15 \end{cases}$ почленно сложим

$59y=295$

$y=5$

подставим y = 5 в любое из уравнений системы, например в первое, и найдем x

$3x+8\cdot 5=31$

$3x+40=31$

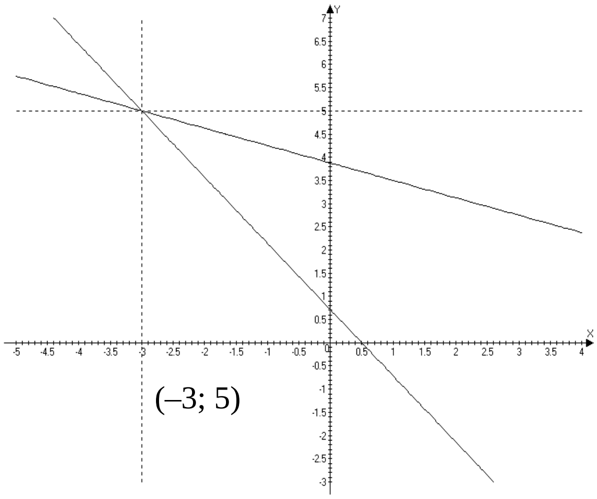
$3x=-9$

$x=-3$

получаем x = –3; y = 5, как и в первом случае.

3) графически (следует помнить, что результаты могут быть получены приближенно, что можно объяснить нашим зрением, умением проводить линии, выбором масштаба, неудобством записи числа и т.д.)

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$ графиком каждого уравнения является прямая, а прямая определяется двумя точками.



$3x+8y=31$

$x=0;\quad y=\dfrac{31}{8}=3\dfrac{7}{8}$

$x=2; 6+8y=31;$

$y=\dfrac{31-6}{8}=\dfrac{25}{8}=3\dfrac{1}{8}$

$-10x-7y=-5$

$10x+7y=5$

$x=0; y=\dfrac{5}{7}$

$x=2; 20+7y=5;$

$7y=-15; y=-\dfrac{15}{7}=-2\dfrac{1}{7}$

4) С помощью определителя:

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ 10x+7y=5 \end{cases}$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}=21-80=-59\neq 0$ единственное решение

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 31 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=217-40=177$ $\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 31 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}=15-310=-295$

$x=\dfrac{177}{-59}=-3;$ $\qquad y=\dfrac{-295}{-59}=5$

Ответ: (–3; 5).

Каким же способом более рационально можно было решить эту систему? Вы правы, конечно с помощью определителя.

<u>Самостоятельно</u> (любым способом)

1) $\begin{cases} 4x-9y=22a \\ 11x+5y=a \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=11 \\ 6x-9y=33 \end{cases}$ $\qquad$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=1 \end{cases}$

Система трех линейных уравнений с тремя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{cases}$$

На I курсе рассматривается решение такой системы с помощью определителя третьего порядка.

Выражение, составленное из коэффициентов при переменных в виде таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется определителем третьего поряда.

Определитель третьего порядка вычислить можно через определитель второго порядка или по правилу Саррюса (правило треугольника).

1) Через определитель II порядка.

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13} \cdot \left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right)$$

Выделяем a_{11} и мысленно вычеркиваем по столбику и строчке, оставшиеся члены составляют определитель второго порядка. Берем a_{12} с противоположным знаком и вычеркиваем первую строчку и второй столбик, оставшиеся члены составляют определитель II порядка. Аналогично берем a_{13} и вычеркиваем первую строчку и третий столбик, оставшиеся члены составляют определитель II порядка.

Выполняем вычисления определителей II порядка по известному уже нам правилу.

Например:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1-21) + 2(4-15) - 4(-28-5) =$$

$$= -66 - 22 + 132 = -88 + 132 = 44;$$

2) Правило треугольника (Саррюса). Рассмотрим схематически

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \underset{a}{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} - \underset{b}{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

a) (основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

b) (основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример: (возьмем тот же определитель)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 112 + 20 - 63 + 8 = -96 + 140 = 44$$

В дальнейшем запись будем вести так

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 120 - 6 - 16 - 45 = 132 - 67 = 65$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) \cdot 1 + (-5) \cdot (-4) \cdot 6 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - (-4) \cdot (-2) \cdot 2 - (-5) \cdot (-3) \cdot 3 = \\ = 6 + 6 + 120 - 6 - 16 - 45 = 132 - 67 = 65 \end{pmatrix}$$

Определители $\Delta_x; \Delta_y; \Delta_z$ получаются из определителя системы путем замены соответствующего столбика столбиком из свободных членов и вычисляются по тому же правилу, что и определитель системы.

Для нахождения значений $x; y; z$ пользуются правилами Крамера

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

Исследование:

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение
2. Если $\Delta = 0$, то система несовместима, т.е. не имеет решения
   (либо $\Delta_x \neq 0;$ либо $\Delta_y \neq 0;$ либо $\Delta_z \neq 0$)
3. Если $\Delta = 0$, то система неопределенна, т.е. имеет множество решений
   ($\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ и $\Delta_z = 0$)

Определитель III порядка обладает всеми свойствами определителя II порядка.

Например, решить систему уравнений

$$1)\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 5x - y - z = 10 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 1 - 5 + 1 - 3 - 25 = -20 - 28 = -48 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 10 - 12 + 2 - 50 = 24 - 72 = -48$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 150 + 2 - 60 - 10 - 36 + 50 = 202 - 106 = 96$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 36 + 10 + 10 - 2 + 30 + 60 = 56 + 90 - 2 = 146 - 2 = 144$$

$x = \frac{-48}{-48} = 1;$ $y = \frac{96}{-48} = -2;$ $z = \frac{144}{-48} = -3$

Ответ: (1; –2; –3).

$$2)\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ 6x + 3y + 3z = 12 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_x = 0,\ \Delta_y = 0,\ \Delta_z = 0,$$

так как коэффициенты при переменных и свободные члены пропорциональны.

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Система имеет множество решений, т.е. неопределена.

$$3)\begin{cases} x-3y+z=7 \\ 3x+y-2z=3 \\ x+7y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix}=-4+6+21-1+14-36=-41+41=0.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}=-28+0+21-0+98-36=-64+119=55\neq 0$$

Δ_y и Δ_z можно уже не находить. Следовательно система не имеет решения.

Самостоятельно:

$$1)\begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ 4x+5y-4z=3 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases} \qquad \left(\Delta=-37; x=1; y=3; z=4\right)$$

$$2)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x-4y+6z=5 \\ 4x-8y+12z=7 \end{cases} \qquad \left(\Delta=0\,\text{система не имеет решения}\right)$$

$$3)\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ 13x+2y+z=13 \end{cases}$$ ($\Delta=0; \Delta_x=0; \Delta_y=0; \Delta_z=0$ система имеет множество решений)

Контрольные вопросы:

1. Что такое системы уравнений II (III) порядка?
2. Что называют элементами определителя?
3. По какой формуле находится определитель системы?

II Раздел. Функции, их свойства и графики.

Урок 7. 2.1 Числовая функция. Способы задания функций. График функции.

План.

1. **Числовая функция.**
2. **Способы задания функций.**
3. **График функции**

Понятие функции является центральным понятием математики и не только математического анализа. Вспомним школьное определение функции.

Если каждому элементу x множества D ставится в соответствие единственный элемент y множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y=f\left(x\right)$.

x – аргумент – независимая переменная; y – зависимая; она находится по закону: f.
Множество D называется **областью определения функции**, множество E называется **множеством значений функции**.
Множество значений аргумента – Ваши личности, множество значений функции – Ваши фамилии. Вот так мы продемонстрировали понятие функции: каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, человек не может иметь две фамилии.

Но математика рассматривает числовые функции, т.е. множества D и E – числовые множества. При этом можно дать и такое определение числовой функции: числовая функция – это множество пар (x,y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом.
Как определяется, задается функция? Прежде всего формулой, по которой по заданному x находится y. Например: $f(x) = x^2 + x + 3$. Подставим x = 2 получим y = 9
Функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими, например:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0; \\ x, \text{ если } x \ge 0 \end{cases}$$

Очень часто зависимость одной переменной величины от другой невозможно выразить аналитически, но такая зависимость существует и определяется она в виде таблицы.

x	-3	-1	0	3	5	6	8	11	13
y	45	22	12	2	-4	3	13	25	34

В таком случае говорят о таблично заданной функции, общепринятая аббревиатура: ТЗФ Обратите внимание, что среди заданных пар чисел (x;y) нет пар с одинаковым первым элементом, в таком случае ТЗФ не являлись бы функцией.

Запишите еще определение числовой функции: числовая функция – множество пар (x;y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом.

И, наконец, когда не удается найти аналитического выражения для $y = f(x)$, найти множество пар (x;y), то функцию можно задать графически, т.е. ее графиком. Вспомните свою кардиограмму, перо самописцев в самых различных приборах.
Рассмотрим несколько примеров на нахождение области определения функции:
1-пример: найти область определения функции вида: $f(x)= \sqrt{1-x^2}$.
Область определения данной функции отрезок [-1;1], соответственно множество заначений функции: [0;1]
2-пример: Дана функция $f(x)=1/x$.
Область определения функции все действительные числа кроме 0-ля, а множество значений функции, то есть $E(f)= (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
3- мысал: Область определения функции f(x)= sin x вся числовая прямая, а множество значений функции отрезок вида [-1;1].
Решим ряд задач.
№1
Найдите область определения данной функции.
a)$F(x)= x+1/x$
b) $F(x)= \sqrt{x^2+1}$
c) $F(x)= 2x^2+3$
№2
A) $F(x)=ax+b$;
B) $F(x)= ax^3+bx^2+cx+d$;
C) $F(x)= \sqrt{x^2-1}$;
D) $F(x)= 2x/x^2+3$;
E) $F(x)= x/x^2-5x+6$;
F) $F(x)= 1/ x-1$;
G) $F(x)=1/ x^2-1$
№3
По графику найдите множество значений данной функции.
a) $F(x)= 1$;
b) $F(x)= x$;
c) $F(x)= \sqrt{x}$;
d) $F(x)= \sqrt{x^2+4}$;

e) $F(x)= x^2-3x-4$.
№4
Постройте графики данных функций.

a) $y= x^2+2x-3$;
b) $y= x^2-5x+6$;
c) $y= 1/x-2$;
d) $y= 2/x+3$;
e) $y= x^3+1$;
f) $y= (x-1)^3$;
g) $y= x^2+2x-3$;
h) $y= \sqrt{x}$;
i) $y= \sqrt{x}-1$.

Итак, сегодня мы рассмотрели функции и способы их заданий, а также научились находить область определения и множество значений функций.

Контрольные вопросы.

1. Определение функции.
2. Что нужно указать для задания функции?
3. Что такое график функции?
4. Какие способы задания функции вы знаете?
5. Что понимают под областью определения функции, заданной формулой?

Домашнее задание.

а) Конспект.
б) Найти D(f):
1) $f(x) = x^3 - 1$ (-∞; ∞)

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2$ (-∞$ ∞)

3) $y=\sqrt{x-4}$ x€[4; ∞)

4) $y=\frac{1}{2x-3}$ x€(-∞; 1,5) U (1,5; ∞)

5) $y=\frac{x}{\sqrt{x+3}}$ x€ (-∞; ∞)

Урок № 8. 2.2 Простейшие преобразования графиков функций.

План

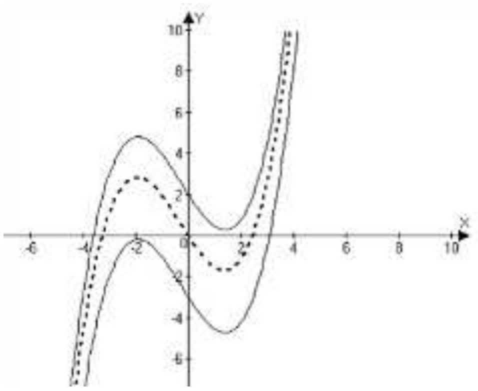
1. Параллельный перенос (сдвиг) графика функции по оси абсцисс.
2.Параллельный перенос (сдвиг) графика функции вдоль оси ординат.
3.Растяжение или сжатие графика функции по оси абсцисс.
4. Растяжение или сжатие графика функции по оси ординат.

При аналитическом задании функции мы находили область определения в аудитории, а сейчас найдем D (y) при графическом задании функции. Рассмотрите приведенные графики функций и найдите D и E.

А теперь поговорим о графиках функций. Строить графики функций по точкам не всегда удобно. Чаще поступают более рационально: строят графики простейших функций, а графики более сложных функций получают из этих графиков путем некоторых преобразований.

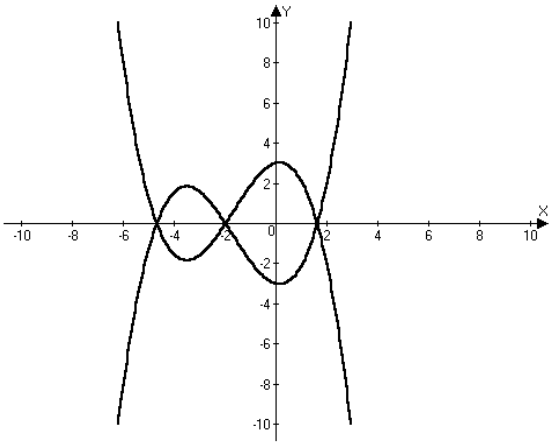
Итак, запишите в Ваши конспекты наши выводы:

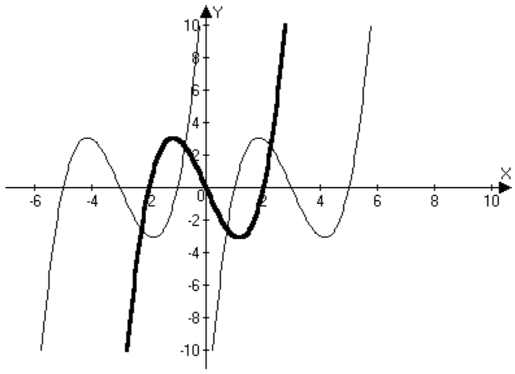
$$y=\sqrt{x}$$



1) **y = f(x) + b** – график функции получается из графика функции y = f(x) путем параллельного переноса этого графика на величину вдоль от ОУ. при этом, если b>0, то график функции f(x) + b располагается выше графика функции f(x), если b<0, то ниже этого графика.

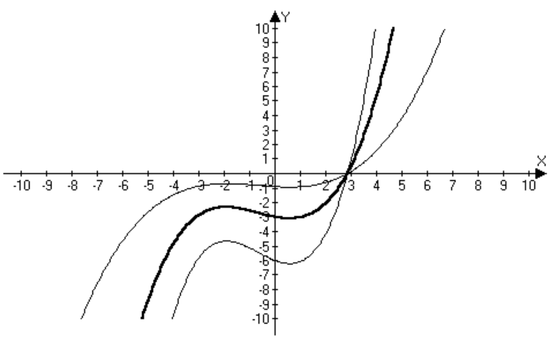
y = f (x + b) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью параллельного переноса этого графика на величину b вдоль оси ОХ, при этом, если b>0, то сдвиг влево, а если b<0, то сдвиг вправо.



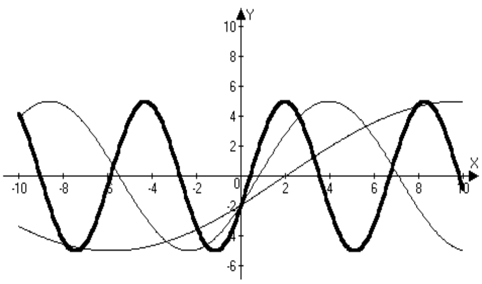


2) **y = - f(x)** – график симметричен графику y = f(x) относительно оси ОХ
Указанные преобразования не изменяют масштаба графика функции.

Рассмотрим преобразования графиков функций, которые изменяют масштаб графика



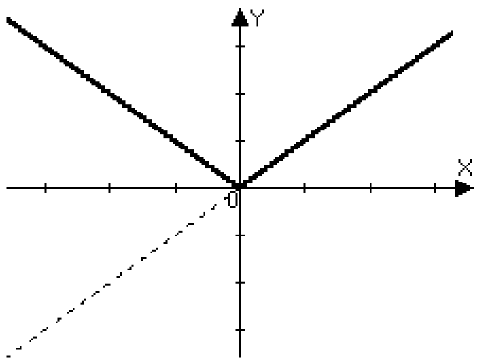
4) y = kf(x) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия графика по оси ОУ пропорционально коэффициенту *a*, причем,
если *a* > 1, то все ординаты графика af(x) увеличиваются в *a* раз, если a < 1, то уменьшаются в *a* раз.



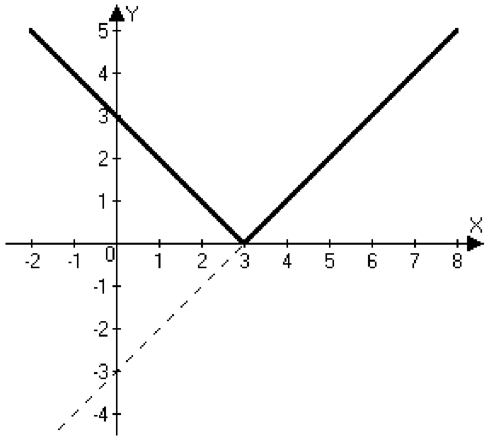
5) y = f(ax) – график функции получается из графика функции y = f(x) с помощью растяжения или сжатия вдоль оси ОХ пропорционально коэффициенту *a*, причем, если, *a* > 1, то график сжимается в *a* раз, если 0 < a <1, то растягивается в 1/*a* раз.

6) y = $|f(x)|$ - для построения этого графика нужно построить график функции y = f(x) и отобразить относительно оси OX те части графика, которые расположены ниже этой оси.

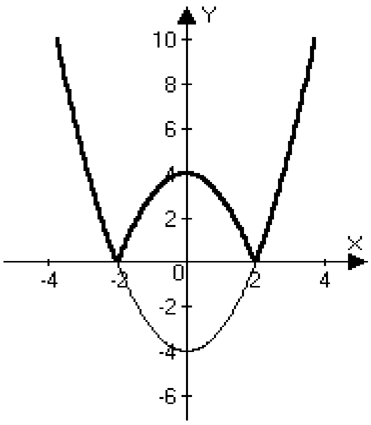
y = $|x|$



y = x – 3; y = $|x-3|$



y = $|x^2-4|$ y = $x^2 - 4$



Теперь Вам предлагается самостоятельно построить графики функций (схематически).

y = $|x-3|$ y = $x^3 - 2$ $y = \dfrac{4}{x-1}$ y = $(x+2)^2$ $y = \sqrt{x+2}$

Контрольные вопросы.

1. Как с помощью графика найти область определения функции?
2. Как с помощью графика функции определить ее корни (нули)?
3. Как будет перемещаться график функции $y = f(x-a)$ при изменении параметра a?
4. Как будет перемещаться график функции $y = f(x) + b$ при изменении параметра b?
5. Как будет меняться график функции $y = f(kx)$ при изменении параметра k?

Урок №9. 2.3. Свойства функций: монотонность, четность, нечетность, периодичность.

План

1. **Обратная функция.**
2. **Свойства функций: монотонность, четность, периодичность.**

Рассмотрим понятия, выражающие т.н. *общие свойства* функций.

Монотонность. Если для x_1, x_2 , принадлежащих интервалу (a;b) и удовлетворяющих условию x_1, < x_2 следует $f(x_1) < f(x_2)$, то, говорят, что на (a;b) эта функция возрастает. Или, как говорили в школе, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция возрастает. Самостоятельно сформулируйте определение убывающей функции. Если функция только возрастает или только убывает в области определения, то о такой функции говорят, что она *монотонна.* Так линейная функция, степенная с нечетным показателем являются монотонными, а популярная $y = x^2$ монотонной не является, т.к. при x < 0 она убывает, а при x > 0 она возрастает.

Ограниченность. Пусть на D задана функция $y = f(x)$. Если существуют такие числа m и M, что для всех x $\in$ D, что m $\le f(x) \le$ M, то говорят, что функция ограничена в области определения. Различают и такие понятия, как ограниченность снизу и ограниченность сверху. Так, $y = x^3$ – неограниченная функция, $y = x^2$ – ограничена снизу, т.к. она неотрицательна в области определения. y = Sinx и y = Cosx – ограниченные функции, т.к. они принимают значения только из отрезка [-1; 1] – это их множество значений

Четность и нечётность. Функция называется четной, если ее область определения симметрична относительно оси Oy и $f(-x) = f(x)$;

Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной – относительно начала координат.

Яркие «представители» четных функций: $y = x^2$, y = Cosx, $y = \frac{1}{x^2}$, нечетных $y = x^3$, y = Sinx, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. Для многих функций нет смысла говорить об их четности – нечетности. Так функция $y = \sqrt{x}$ не относится ни к четным, ни к нечетным, потому как ее область определения несимметрична относительно нуля. Такие функции называют функциями общего вида.

Какова методика определения четности – нечетности функции? Рассмотрим примеры.

$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$ Получили определение нечетной функции, вывод: функция нечетная.

$f(x) = \frac{Cosx}{x^4+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:

$f(-x) = \frac{Cos(-x)}{(-x)^4+1} = \frac{Cosx}{x^4+1} = \frac{Cosx}{x^4+1} = f(x)$ Получили определение четной функции, вывод: функция четная.

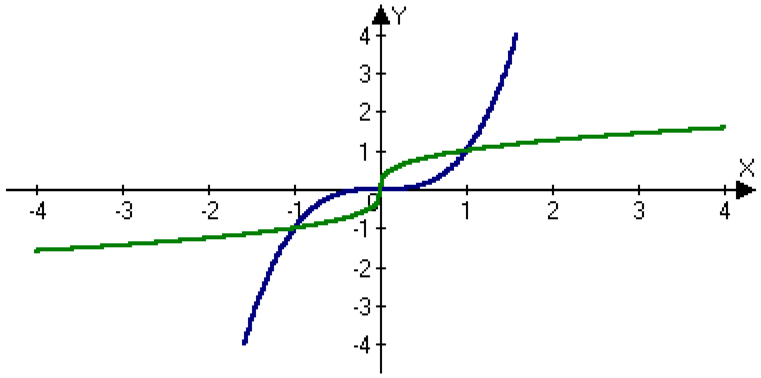
Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что для всех x из области определения выполняется равенство:

$f(x+T) = f(x),\ \text{где}\ T \ne 0$

Очевидно, что если существует такое число T, называемое периодом, то число nT, где n – целое число, также является периодом этой функции. Важнейшие представители периодических функций – тригонометрические функции, которые Вы будете изучать подробно на предстоящих занятиях.

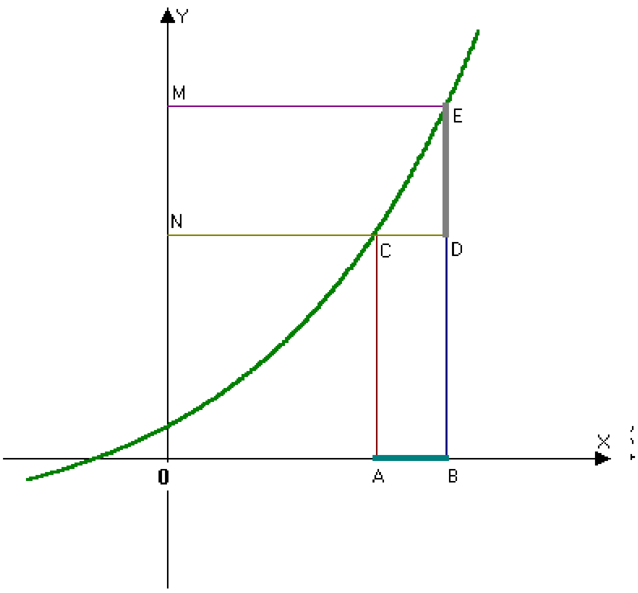
Урок №10. 2.4. Обратная функция.

Понятие об обратной функции. Очень важное и глубокое понятие. Будьте внимательны. Пусть дана функция $y = x^3$ Вспомним, что она монотонная: каждому значению аргумента соответствует единственное значение аргумента и наоборот: *каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента* (только для монотонных функций!). Будем далее считать независимой переменной y, а x – его функцией, выразим x через y. $x = \sqrt[3]{y}$ и заменим, как то принято обозначать аргумент и функцию, x на y и y на x, получим $y = \sqrt[3]{x}$. Вот эти две функции $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ и называются *взаимно обратными*.



Построим графики этих функций и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Запомните это свойство графиков всех взаимно обратных функций. В дальнейшем Вы будете строить обратные функции по мере их изучения.

Но как быть, если функция, для которой надо построить обратную не является монотонной? Например, необходимо построить обратную для $y = x^2$, которая немонотонна. Для этого необходимо так задать область определения исходной функции, на которой она стала бы монотонной. Если для функции $y = x^2$ положить D = [0; ∞), то на этом луче она монотонно возрастает, а значит имеет обратную. Очевидно, это $y = \sqrt{x}$ Построим их графики и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.



Поработайте самостоятельно.

Постройте обратную функцию для монотонной линейной функции $y = 3x$, постройте их графики.

Определив функцию $y = \frac{1}{x^2}$ на D = [0; ∞), постройте для нее обратную функцию.

Контрольные вопросы:

1. В каком случае функция называется монотонной?
2. Какая функция называется четной?
3. Какая функция называется нечетной?
4. Какая функция называется периодической?

III Раздел. Показательная, логарифмическая и степенная функции.
Степень с рациональным показателем и ее свойства.
Логарифмы. Десятичные и натуральные логарифмы. Преобразование и вычисление значений показательных логарифмических функций.

Урок № 11. Степень с рациональным показателем и ее свойства.

План

1. Степень с действительными показателями
2. Решение упражнений.

Степень с действительными показателями.
Повторить:
N – мн-во всех натуральных чисел.
Z – мн-во всех целых чисел
Q – мн-во всех рациональных чисел.
I – мн-во всех иррациональных чисел.
R – мн-во всех действительных чисел
числ. прямая (-∞; ∞)

Определение. Степенью α>0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное (n>1) называется $\sqrt[n]{\alpha^m}$ $\alpha^{\frac{m}{n}} \sqrt[n]{\alpha^m}$

Для любых рациональных чисел r и s и любых α и в справедливы равенства:

1) $\alpha^r : \alpha^s = \alpha^{r+s}$ 2) $\alpha^r : \alpha^s = \alpha^{r-s}$
3) $(\alpha r)^s = \alpha^{rs}$ 4) $(\alpha в)^r = \alpha^r \cdot в^r$ 5) $\left(\frac{\alpha}{\hat{a}}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\hat{a}^r}$

Кроме того выполняются $\alpha^0 = 1$ $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^r}$

Вычислить: $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7};$ $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{32}$ $\alpha^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{\alpha^{-7}}$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ или $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$

$81^{\frac{3}{4}} = (3^{\cancel{4}})^{\frac{3}{\cancel{4}}} = 3^3 = 27$

$128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^2 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$128^{-\frac{2}{7}} = \left(2^7\right)^{-\frac{2}{7}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Аналогично

1) $16^{\frac{5}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$

2) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3^9}{15^{18}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\left(3^9\right)^{\frac{2}{9}}}{\left(5^{18}\right)^{\frac{2}{9}}} = \frac{3^2}{5^4} = \frac{9}{625}$

3) $8^{2\frac{1}{3}} : 81^{0,75} = \left(2^3\right)^{\frac{7}{3}} : \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{2^7}{3^3} = \frac{128}{27}$

4) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$

Разложить на множители

$(\alpha x)^{\frac{1}{3}} + (\alpha y)^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$

1)

2) $\alpha-\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-1\right)$

3) $3+3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)$

4) $c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}=c^{\frac{1}{4}}\left(c^{\frac{1}{4}}+1\right)$

5) $\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}+3в^{\frac{1}{2}}\right)^2$

6) $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-2в^{\frac{2}{3}}\right)^3$

Сократить дробь

1) $\dfrac{\alpha-в}{\alpha^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{z^8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$ (8)

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$

4) $\dfrac{\alpha+в}{\alpha^{\frac{2}{3}}-\alpha^{\frac{1}{3}}в^{\frac{1}{3}}+в^{\frac{2}{3}}}$

Вычислить

$(-0{,}5)^{-4}-625^{0,25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$

1) $(-0{,}5)^{-4}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16$

2) $625^{-0,25}=\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}=5$

3) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{2}=\frac{8}{27}$

4) $19\cdot(-3)^{-3}=19\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)=-\frac{19}{27}=16-5-\frac{8}{27}-\frac{19}{27}=11-1=10$

Домашнее задание

Вычислить:

1) $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{0,25}\cdot 2^{0,5}}$

2) $81^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$

3) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-25^{0,5}$

Выполнить действия:

а) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$

б) $\left(3\alpha^{\frac{1}{4}}+2\hat{a}^{\frac{1}{4}}\right)^2$

г) $4-4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}\left(4^{\frac{2}{3}}-1\right)^3$

д) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$

е) $\left(\dfrac{8\alpha^{-3}}{27в^{6}}\right)$

$$\frac{4\alpha^5 x^3 y}{5в^3 c z^4} : \frac{8\alpha^6 x^3 y^4}{3вc^2 z^4}$$

Урок №12.
Степенная функция, ее свойства и график.
План.

1. **Определение степенной функции.**
2. **Свойства степенной функции.**
3. **Построение графика степенной функции.**

а.

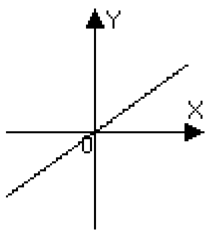
1. Функция вида $y = x^n$ называется степенной функцией.

x – аргумент (основание степени)
n – показатель степени.

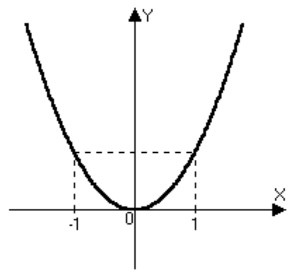
Рассмотрим графики функций при $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}$

При n > 0

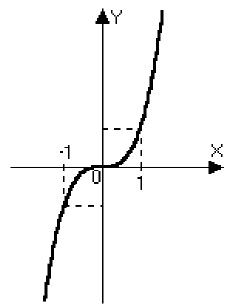
$n = 1 \quad y = x$



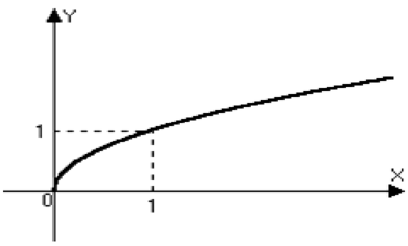
$n = 2 \quad y = x^2$



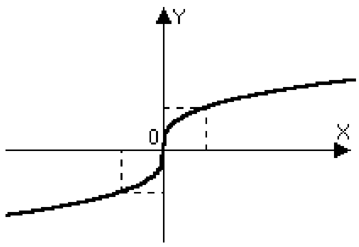
$n = 3 \quad y = x^3$



$n = \frac{1}{2} \quad y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}; \ x \ge 0$

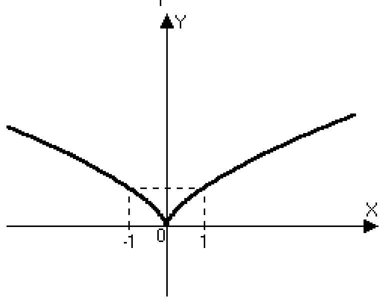


$n = \frac{1}{3} \quad y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}; \ x \in R$



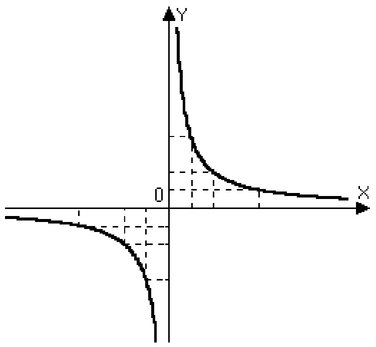
$n = \frac{2}{3} \quad y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

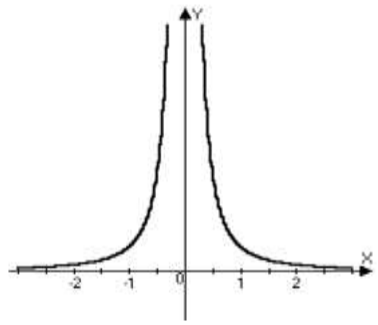
$x \in R; \ y > 0$

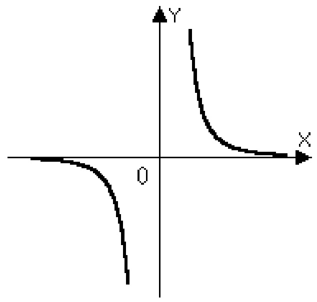


При n < 0

$n=-1;\ y=x^{-1}=\dfrac{1}{x};\quad x\neq 0$ $\qquad$ $n=-2;\ y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2};\ \ x\neq 0$ $\qquad$ $n=-3;\ y=x^{-3}=\dfrac{1}{x^3};$
$x\neq 0$

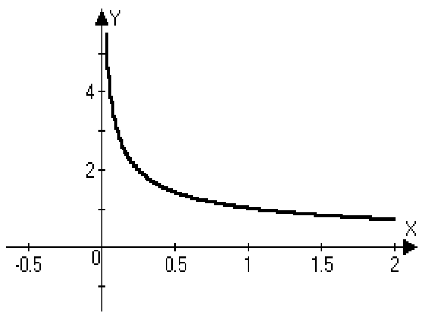


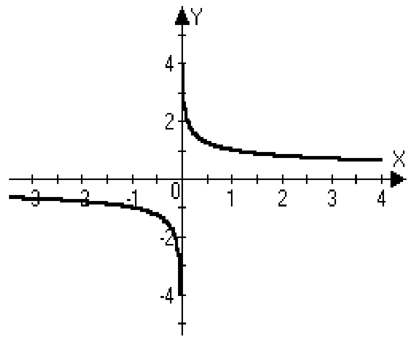


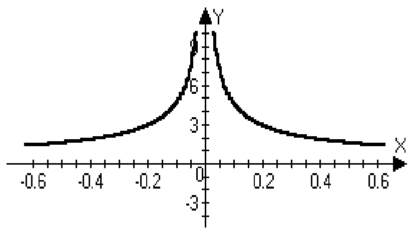


$n=-\dfrac{1}{2};\quad y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}};\quad x>0$ $\quad$ $n=-\dfrac{1}{3};\quad y=x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad x\neq 0$

$n=-\dfrac{2}{3};\ \ y=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\ \ x\neq 0$







Отметим свойства общие для степенных функций:

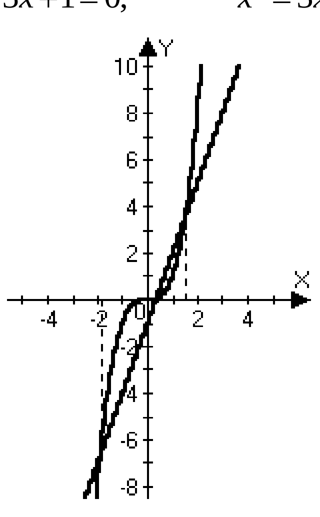
1) при $n>0$ $\quad x>0$ функция возрастающая
2) при $n<0$ $\quad x>0$ функция убывающая

<u>Применение</u>: используя графики степенных функций можно графически решать некоторые алгебраические уравнения.

<u>Нпример</u> $x^3-3x+1=0;\qquad x^3=3x-1$

$\begin{cases} y=x^3 \\ y=3x-1 \end{cases}$

$x_1=-1.88$
$x_2=0.35$
$x_3=1.53$



Корни приближённые, но другим способом это уравнение решить нельзя!

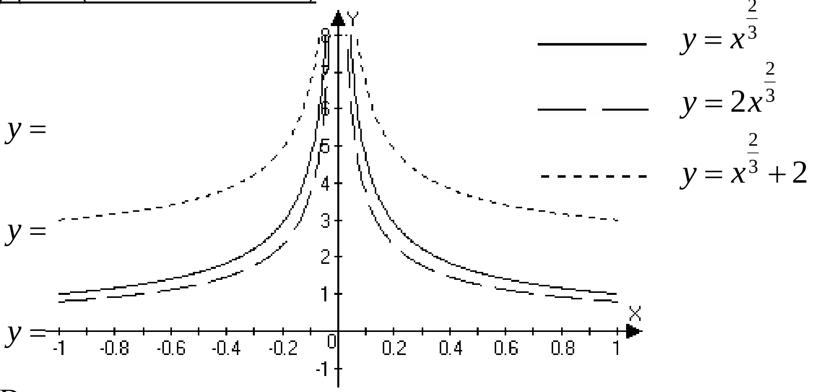
Построить схематически графики функций:

1) $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

2) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 2$

Дома (самостоятельно)



Вычислить самостоятельно:

1.19 $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5} \cdot 10^{-2} + \frac{0,5^{-2} - \left(\frac{2}{7}\right)^0}{(-2)^{-2}} = 10^5 \cdot 10^{-2} + \frac{2^2 - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 10^3 + \frac{3}{\frac{1}{4}} = 1000 + 12 = 1012$;

1.21 $\sqrt{\sqrt{65} - 7} \cdot \sqrt{\sqrt{65} + 7} = \sqrt{65 - 49} = \sqrt{16} = 4$;

2.2 $\left(3a^{\frac{2}{3}} - b^{-1}\right)\left(3a^{\frac{2}{3}} + b^{-1}\right) = \left(3a^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(b^{-1}\right)^2 = 9a^{\frac{4}{3}} - b^{-2} = 9a\sqrt[3]{a} - \frac{1}{b^2}$;

2.4 $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = 4 + 2 + \sqrt{4-3} = 4 + 2 \cdot 1 = 6$

с последующей проверкой результата.

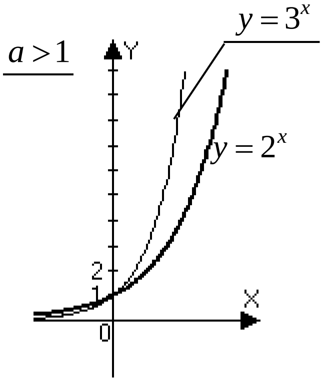
Урок № 13.   3.3.Показательная функция, ее график и свойства.
План.
1. Определение показательной функции.
2. Свойства показательной функции.
3. Построение графика показательной функции.
4. Решение показательных уравнений.

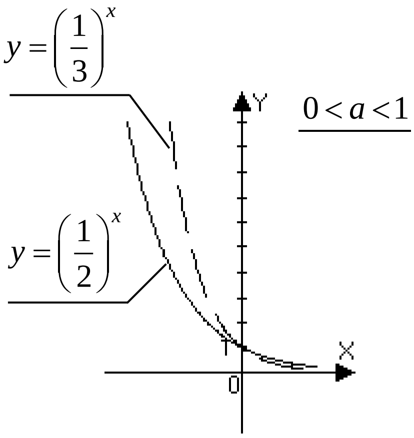
Определение. Функция вида $y = a^x$, где $a \neq 1$ и $a > 0$ называется показательной.
Рассмотрим функции.

$y = 2^x$; $y = 3^x$ $(a > 1)$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $(a < 1)$

построим их графики прочтём свойства функций.





Свойства

1. Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$
3. При $x = 0$ $y = 1$.

Эти свойства называются общими свойствами показательной функции и независят от основания, какое оно больше 1 или меньше 1.

$a > 1$	$a < 1$
4. Функция возрастающая	4. Функция убывающая
5. при $x < 0$ $y < 1$ $x > 0$ $y > 1$	5. при $x < 0$ $y > 1$ $x > 0$ $y < 1$
6. $x \to \infty$, $y \to \infty$	6. $x \to \infty$, $y \to 0$
та степень больше показатель которой больше	та степень больше, показатель которой меньше

Предложение: прочесть свойства функций по графику.
Используя свойства функции предлагается решить примеры
а) Сравнить степени с 1

Условие	Ответы
$5,26^{0,38}$	>1
$1,4^{-0,84}$	<1
$0,72^{0}$	$=1$
$0,3^{1,84}$	<1
$\left(\frac{2}{7}\right)^{-0,78}$	>1

При решении учитывается основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и знак показателя степени.
б) Сравнить показатели степени, если:

Условие: Ответы:

$0,4^m < 0,4^n$	$m > n$
$2,7^m < 2,7^n$	$m < n$
$5,2^m > 5,2^n$	$m > n$
$\left(\frac{4}{9}\right)^m > \left(\frac{4}{9}\right)^n$	$m < n$
$\left(\frac{5}{2}\right)^m < \left(\frac{5}{2}\right)^n$	$m < n$

При решении обращается внимание на основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и учитывается 6-ое свойство показательной функции

Контрольные вопросы:

1. Определение показательной функции.
2. Область определения показательной функции.
3. Область значений функций.
4. В каком случае функция возрастает?
5. В каком случае функция убывает?

Домашнее задание

1) Конспект
2) Решить уравнения:

1) $625^x = 5$ 2) $\left(\frac{1}{27}\right)^x = 3$ $\left(x = -\frac{1}{3}\right)$

3) $7^2 = \sqrt[3]{49}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

4) $\left(\frac{25}{9}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{5}\right)$

5) $\left(\frac{1}{16}\right)^x = 8$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$

6) $в^{(x-1)(x^2-4)} = 1$ (1; 2; -2)

$\sqrt[õ]{\frac{1}{2}}^{\,2} = 4$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Урок №14. 3.4 Решение простейших и сводящих к ним показательных уравнений и неравенств.

План.

1. **Решение показательных уравнений, приводимых к одному основанию.**
2. **Решение показательных уравнений способом вынесения общего множителя за скобки.**
3. **Решение показательных уравнений, приводящиеся к квадратному.**

Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

Например: $2^{2x-1} - 4 = 2^x$; $5^{\sqrt{x}} = 1$ и т.д.

При решении показательных уравнений применяются разные методы решения, которые мы рассмотрим на конкретных примерах.

1. $2^{3x-8}=64$, т.к. $64=8\cdot 8=2^3\cdot 2^3=2^6$, то $2^{3x-8}=2^6$, мы привели обе части уравнения к одинаковому основанию, а так как степени равны, равны их основания, то равны и показатели степеней, т.е $3x-8=6; \quad \Rightarrow \quad 3x=14 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$

Ответ: $4\frac{2}{3}$

Показатель степени может быть любым числом, поэтому проверку делать не надо.

Ответ: $4\frac{2}{3}$

2. $0{,}1^{2x}\cdot 10^{3x-2}=100$ В левой части $0{,}1=10^{-1}$ и тогда $\left(10^{-1}\right)^{2x}\cdot 10^{3x-2}=10^2$, так как при умножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются, при возведении степени в степень показатели перемножаются,

$10^{-2x+3x-2}=10^{-2} \quad \Rightarrow \quad -2x+3x-2=-2 \quad x=0$, это и есть решение уравнения. Ответ: $x=0$.

Оба уравнения решались методом сведения обеих частей уравнения к одинаковому основанию. А если нельзя свести к одинаковому основанию?

$2{,}76^{3x-1}=0{,}713$ Что делать?

Как решить?

3.Теперь применим только метод логарифмирования. Прологарифмируем обе части уравнения, например по основанию 10, т.е найдём от обеих частей десятичный логарифм

$\lg 2{,}76^{3x-1}=\lg 0{,}713$

$(3x-1)\lg 2{,}76=\lg 0{,}713$

$3x-1=\frac{\lg 0{,}713}{\lg 2{,}76}$

$3x-1=-0{,}137$

$3x=1-0{,}137$

$3x=0{,}863$

$x\approx 0{,}288$, результат не изменится, если взять логарифм натуральный, то есть берём тот логарифм который можно найти, используя МК.

4. $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$ используя свойства степени, имеем $3^{2x}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-2}=1$ в левой части каждое слагаемое содержит общий множитель 3^{2x}. Вынесем 3^{2x} за скобки, получим:

$3^{2x}\left(1-2\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{-2}\right)=1; \quad 3^{2x}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)=1; \quad 3^{2x}\cdot\frac{9-6-2}{9}=1$

$3^{2x}\cdot\frac{1}{9}=1 \qquad 3^{2x}=9 \qquad 3^{2x}=3^2$

$2x=2 \qquad x=1$

Ответ: $x=1$. Этот метод так и называется – метод вынесения общего множителя за скобки.

5. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0$ так как $4^{2x}=\left(4^x\right)^2$, то уравнение $2\cdot\left(4^x\right)^2-17\cdot 4^x+8=0$ представляет квадратное уравнение относительно 4^x. Пусть $4^x=t$, тогда

$2\cdot t^2-17t+8=0$ решаем квадратное уравнение относительно переменной *t*.

$Д=17^2-4\cdot 8\cdot 2=289-64=225$

$t_{1,2}=\frac{17\pm 15}{4}; \quad t_1=8; \quad t_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Подставим значения *t* в равенство $4^x=t$

$$4^x = 8 \quad \Rightarrow \; 2^{2x} = 2^3; \quad 2x = 3; \qquad x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$4^x = \frac{1}{2}; \quad 2^{2x} = 2^{-1}; \qquad 2x = -1; \quad x = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $x = 1{,}5; \quad x = -0{,}5$. При решении уравнения применим первоначально сведения к квадратному уравнению. В следующих примерах постараемся самостоятельно определять метод решения и затем с подсказкой преподавателя выполнять решение этого уравнения.

1.4. $\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$; приведем к одинаковому основанию «3»

$$3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{3}{2}$$

$x = -3$. Ответ: $x = -3$

1.9. $2^x \cdot 5^x = 1000$; $10^x = 10^3$; $x = 3$. Ответ: $x = 3$

1.19. $0{,}096^{4-2x} = 5{,}17$

свести к одинаковому основанию нельзя, прологарифмируем обе части уравнения:

$$(4 - 2x) \cdot \ln 0{,}096 = \ln 5{,}17; \qquad 4 - 2x = \frac{\ln 5{,}17}{\ln 0{,}096};$$

$$4 - 2x = -0{,}0408; \qquad -2x = -4 - 0{,}0408; \qquad -2x = -4{,}0408$$

$x = 2{,}0204$

$x \approx 2{,}02$ Ответ: $x \approx 2{,}02$

1.38

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2}$$

$$3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 = 7^x + 7^x \cdot 7 + 7^x \cdot 7^2$$

$$3^x (1 + 3 + 9) = 7^x (1 + 7 + 49)$$

$3^x \cdot 13 = 7^x \cdot 57; 3^x \neq 0$ и $7^x \neq 0$ можно разделить обе части уравнения на 3^x или 7^x, получим:

$$\frac{3^x}{7^x} = \frac{57}{13} \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{57}{13}$$

$$x \cdot \lg\frac{3}{7} = \lg\frac{57}{13}$$

$x = \dfrac{\lg\frac{57}{13}}{\lg\frac{3}{7}} = -1{,}74$. Ответ: $x = -1{,}74$

1.45

$$4 + 2^x = 2^{2x-1} \qquad 4 + 2^x = 2^{2x} \cdot 2^{-1} \qquad 2^{2x} \cdot \frac{1}{2} - 2^x - 4 = 0$$

$$\left(2^x\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 2^x - 4 = 0$$

Пусть $2^x = t$, тогда $\frac{1}{2}t^2 - t - 4 = 0$

$t^2-2t-8=0 \qquad Д=4+4\cdot 8=36$

$t_{1,2}=\dfrac{2\pm 6}{2}; \qquad t_1=4 \quad t_2=-2$

$2^x=4; \quad 2^x=2^2; \qquad \underline{x=2}$ $\qquad 2^x=-2$ – уравнение не имеет решения, т.к. $2^x>0$ всегда. Ответ: $x=2$

<u>*Самостоятельно*</u>:

<u>1.2.</u> $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=\dfrac{25}{4}$

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$

$\underline{x=-2}$

1.22. $33\cdot 2^{x-1}-2^{x+1}=29$

$33\cdot 2^x\cdot 2^{-1}-2^x\cdot 2^1=29$

$2^x\left(\dfrac{33}{2}-2\right)=29$

$2^x\cdot\dfrac{29}{2}=29 \qquad 2^x=29\cdot\dfrac{2}{29}$

$2^x=2; \qquad \underline{x=1}$

<u>1.35</u>

$9^{x-1}+3^{x+2}=90 \qquad 9^x\cdot 9^{-1}+3^x\cdot 3^2=90 \qquad \left(3^x\right)^2\cdot\dfrac{1}{9}+3^x\cdot 9=90$

$3^x=t$

$\dfrac{1}{9}t^2+9t-90=0 \qquad t^2+81t-810=0 \qquad Д=81^2+4\cdot 810=9801$

$t_{1,2}=\dfrac{-81\pm 99}{2}; \qquad t_1=\dfrac{-81+99}{2}=\dfrac{18}{2}=9$

$t_2=\dfrac{-81-99}{2}=\dfrac{-180}{2}=-90 \qquad 3^x=9; \qquad 3^x=3^2; \qquad x=2$

$3^x\neq -90$, уравнение не имеет решения, т.к. $3^x>0$ всегда

Ответ: $x=2$

Урок № 15. 3.4. Решение простейших и сводящих к ним показательных уравнений и неравенств.

Показательные неравенства.

1. **Решение показательных неравенств, приводимых к одному основанию.**
2. **Решение показательных неравенств, способом вынесения общего множителя за скобки.**

<u>Определение</u>. Неравенства, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

При решении показательных неравенств используются свойства показательной функции, свойства степени. Рассмотрим простейшие методы решения показательных неравенств.

а) $5^{x-1}>\left(\dfrac{1}{25}\right)^{4-x}$

приведём обе части неравенства к одинаковым основаниям. Учитывая, что $\frac{1}{25}=5^{-2}$, то $5^{x-1}>\left(5^{-2}\right)^{4-x}\Rightarrow 5^{x-1}>5^{-2(4-x)}$, т.к. $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$ (свойство степени). Основание 5 > 1 $\Rightarrow$ функция возрастающая и поэтому $x-1>-2(4-x)$.

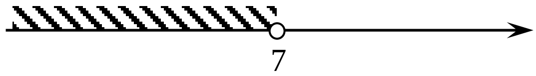
Решаем неравенство первой степени.

$x-1>-8+2x$

$x-2x>-8+1$

$-x>-7$

$x<7$



$x\in(-\infty;7)$

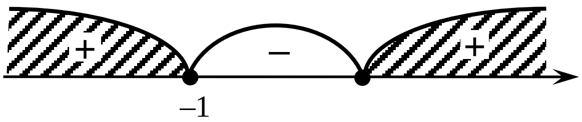
б) $0,7^{x^2-1}\le 1$. Приведём к одинаковым основаниям. Зная, что $a^0=1$, представим правую часть неравенства, как $0,7^0$ и тогда

$0,7^{x^2-1}\le 0,7^0$

так как 0,7 < 1, то функция убывающая и значит $x^2-1\ge 0$. Это квадратное неравенство, которое решается методом интервалов.

$(x-1)(x+1)\ge 0$

$x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$



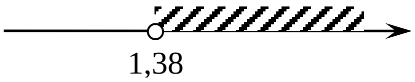
в) $5^x>9,2$

Привести к одинаковым основаниям не представляется возможным. Используем метод логарифмирования.

$x\log_5 5>\log_5 9,2$, т.к. $\log_5 5=1$, то

$x>\log_5 9,2$

$x>1,38$



$x\in(1,38;+\infty)$

Можно логарифмировать обе части неравенства по любому основанию. Например по основанию 10.

$x\lg 5>\lg 9,2$

$x>\frac{\lg 9,2}{\lg 5}$, т.к. $\lg 5>0$ и $x>1,38$. Ответ тот же.

д) $3^{x+1}-3^x\le 54$ Используя свойство степени, имеем $3^x\cdot 3^1-3^x\le 54$; вынесем 3^x за скобки $3^x(3-1)\le 54\ \Rightarrow\ 3^x\cdot 2\le 54\ \Rightarrow\ 3^x\le 27\ \Rightarrow\ 3^x\le 3^3$, т.к. 3 > 1, то $x\le 3$

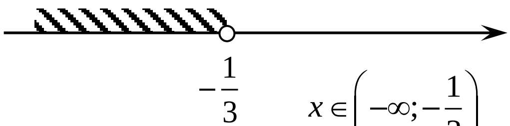
2.2 $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>4,5^{x-2}$, т.к. $4,5=\frac{9}{2}$, то $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>\left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>\left(\frac{2}{9}\right)^{-x+2}$

Учитывая, что $\frac{2}{9}<1$, то

$2x+3<-x+2$

$3x<-1$

$x<-\frac{1}{3}$



$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$

2.3 $9^{0,5x^2-3}<27$, приведем к основанию 3

$3^{2\left(0,5x^2-3\right)}<3^3$, т.к. 3 > 1, то

$2\left(0,5x^2-3\right)<3$

$x^2-6<3$

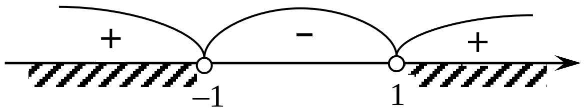
$x^2-9<0$

$(x-3)(x+3)<0$ $\qquad x\in(-3;3)$

2.9 $\qquad 2^{\frac{x-1}{x+1}}>1$

$2^{\frac{x-1}{x+1}}>2^0$, т.к. 2 > 1, то

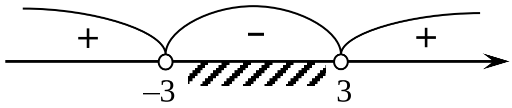
$\dfrac{x-1}{x+1}>0$ $\qquad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$



2.11 $\qquad \left(\dfrac{3}{7}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{49}{6}\right)^{x-1}>\dfrac{4}{49}$.

В левой части неравенства надо умножить степени с одинаковым показателем. Т.к.

$a^n\cdot b^n=(ab)^n$, то $\left(\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{49}{6}\right)^x>\dfrac{4}{49}$



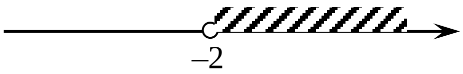
Сокращаем дроби и получим

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^x>\dfrac{4}{49}$

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^x>\left(\dfrac{2}{7}\right)^2$

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^x>\left(\dfrac{7}{2}\right)^{-2}$ $\qquad$, т.к. $\dfrac{7}{2}>1$, то

$x>-2$ $\qquad x\in(-2;+\infty)$



<u>2.12</u>

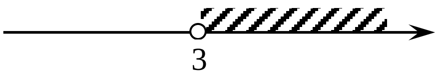
$0,3^{3x-7}<\left(\dfrac{100}{9}\right)^{-1}$

$0,3^{3x-7}<\left(\dfrac{10}{3}\right)^{-2}$

$\left(\dfrac{3}{10}\right)^{3x-7}<\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$ $\qquad$, т.к. $\dfrac{3}{10}<1$, то

$3x-7>2$

$3x>9$ $\qquad x\in(3;+\infty)$



$x>3$

Самостоятельно:

1) $0,4^{x-2}\le\dfrac{125}{8}$

2) $2,5^{\frac{x+1}{x-2}}\ge1$

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}>\dfrac{1}{32}$

4) $7^x<12,7$

Урок № 16. 3.5.Логарифмы. Десятичные и натуральные логарифмы.

План.

1. **Определение логарифма.**
2. **Свойства логарифмов.**
3. **Решение упражнений.**

Мы знаем, что $a^n = b$, а если n – неизвестно? Как можно найти показатель степени из равенства: $2^x = 14$? Никакие известные нам действия не помогут. Вот поэтому вводится новое понятие, понятие логарифма.

Определение: Логарифмом числа называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_a b = c$; $a > 0$ согласно определения имеем $a^c = b$, и тогда $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$5^{\log_5 2} = 2$; $\quad 0,2^{\log_{0,2} 3} = 3$.

Логарифмы обладают свойствами:

Логарифмы отрицательных чисел на существуют (положительное число в любой степени есть число положительное).

Логарифм единицы при любом основании равен нулю, $\log_a 1 = 0$, т.к $a^0 = 1$.

Логарифм самого основания равен 1, то есть $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

Логарифм произведения при любом основании равен сумме логарифмов сомножителей при этом же основании. $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$

Покажем, что это так:

Пусть $\log_a N_1 = n_1$ и $\log_a N_2 = n_2$; по определению логарифма имеем $N_1 = a^{n_1}$ и $N_2 = a^{n_2}$

$N_1 \cdot N_2 = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1 + n_2}$; отсюда $n_1 + n_2 = \log_a (N_1 \cdot N_2)$ и тогда

$\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, что и требовалось доказать!

Логарифм дроби при любом основании равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя при этом же основании

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$$

(доказательство аналогично свойству 4, докажите самостоятельно. Можно воспользоваться подсказкой учебника)

Логарифмом степени при любом основании равен произведению показателя степени на логарифм основания степени. $\log_a N^m = m \cdot \log_a N$

Логарифм числа с основанием 10 называется десятичным и имеет особую запись.

$\log_{10} b = \lg b$

Логарифм числа с снованием e называется натуральным и имеет также особую запись $\log_e b = \ln b$. $e \approx 2,718$ число Непера.

И десятичный, и натуральный логарифмы любого числа можно находить при помощи МК

$\lg 17,4 = 1,2405$ $\qquad \ln 0,384 = -0,9571$

17,4 $\boxed{\text{log}}$ $\qquad$ 0,384 $\boxed{\text{ln}}$

А если надо вычислить логарифм числа при любом основании? Что делать? Надо перейти к основанию 10 или e.

По определению логарифма $a^{\log_a N} = N$, используя свойство логарифмов (смотрите свойство 6) имеем $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$

и тогда $\boxed{\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ и называется формулой перехода от одной системы логарифмов к другой. Эта формула часто применяется при решении логарифмических уравнений и неравенств $\log_a N = \frac{\lg N}{\lg a}; \log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$, что даёт возможность вычисления выполнять при помощи МК.

Решить: $\log_{1,24} 618,7 = \frac{\lg 618,7}{\lg 1,24} = 29,88$ $\quad\quad$ $\log_{1,24} 618,7 = \frac{\ln 618,7}{\ln 1,24} = 29,88$

Как видно результаты равные поэтому можно делать переход к любому основанию.

Проверьте результат: $\log_{1,2} 0,784 = -1,3347 \quad \log_{0,34} 11,78$

Самостоятельно: $\log_{0,38} 6,24; \quad \log_{1,2} 0,00412,$ а затем решаются №№

Пособие: стр. 28 № 3.27 вместе с преподавателем; № 3.21; 3.23 – самостоятельно (с последующей проверкой)

Замечания: 1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$, т.е. $\quad$ 2) $\boxed{\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b}$ $\quad$ 3) $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$

Используя определение логарифма, можно находить переменную.

Рассмотрим на конкретных примерах

$\log_{\sqrt{3}} x = -2$ по определению логарифма $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = x \;\Rightarrow\; x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\log_x \frac{1}{27} = -3$ по определению логарифма $x^{-3} = \frac{1}{27} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^3} = \frac{1}{27}; \quad x^3 = 27; \quad x = 3$

$\log_{\sqrt[3]{2}} 64 = x$ по определению логарифма

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 2^6; \quad \frac{1}{3}x = 6; \quad x = 18$$

Решить.

3.4 $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3; \quad \left(\sqrt{x}\right)^3 = 8; \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8; \quad x^{\frac{3}{2}} = 8; \quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}; \quad x = 2^2 = 4$

3.8 $\log_{\frac{2}{3}} 2,25 = x; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2\frac{1}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}; \quad \Rightarrow x = -2$

3.9 $\log_{5\sqrt[3]{5}} x = -0,8; \quad \left(5\sqrt[3]{5}\right)^{-0,8} = x; \quad x = \left(5\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = 5^{-\frac{16}{15}} = \frac{1}{5^{\frac{16}{15}}} = \frac{1}{5^{1\frac{1}{15}}} = \frac{1}{5\sqrt[15]{5}};$

3.11

$\log_{0,6} 4\frac{17}{27} = x; \quad 0,6^x = 4\frac{17}{17}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{125}{27}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5^3}{3^3}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}; \quad x = -3$

3.16 $\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2\sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5} = \log_{2^2} 6^2 + \log_2 10 - 2\cdot\frac{1}{2}\log_2 15 + 2^{2\cdot\frac{1}{2}\log_2 5} =$

$= \frac{2}{2}\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 + 2^{\log_2 5} = \log_2\frac{6\cdot 10}{15} + 5 = \log_2 4 + 5 = 2 + 5 = 7$

3.20

$0,04^{1+\log_5 0,02} - \sqrt{2}^{\log_2 25} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1+\log_5\frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5\frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25}\cdot 5^{-2\log_5\frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} =$

$= \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{1}{50}\right)^{-2} - 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{25}\cdot 2500 - 5 = 100 - 5 = 95$

Самостоятельно:

3.10; 3.12; 3.13; 3.14; 3.18

3.10 $\log_{2\sqrt[5]{2}} x = \frac{5}{6}$ $\qquad x = \left(2\sqrt[5]{2}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(2^1 \cdot 2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(2^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = 2$

3.12 $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{81} = x \quad \left(3\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{81};\ 3^{\frac{3}{2}x} = 3^{-4}$ $\qquad$ 3.14

$$\frac{\log_3 27 - \log_3 1}{\log_3 4{,}5 + \log_3 \frac{2}{3}} = \frac{3-0}{\log_3\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{\log_3 3} = \frac{3}{1} = 3$$

3.18 $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} = \frac{49}{49^{\log_7 2}} - 4^{-1} = \frac{49}{7^{2\log_7 2}} - \frac{1}{4} = \frac{49}{4} - \frac{1}{4} = \frac{48}{4} = 12$

1. Логарифмирование выражений.

Определение: Действие нахождения логарифма числа называется действием логарифмирования.

Рассмотрим на примере.

Пусть дано число в общем виде $\quad x = \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot \sqrt[5]{(a+b)^2}}{(a-b)^4 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}$

Найдём логарифм числа x, используя свойства логарифмов (логарифм дроби, произведения, степени при любом основании)

Так как можно находить логарифм при любом основании, то договорились основание не писать.

$$\log x = \log\left(a^3 \cdot b^2 \sqrt[5]{(a+b)^2}\right) - \log\left((a-b)^4 \cdot \sqrt{a^2+b^2}\right) = \log a^3 + \log b^2 + \log \sqrt[5]{(a+b)^2} - \log(a-b)^4 -$$

$$-\log\sqrt{a^2+b^2} = 3\log a + 2\log b + \frac{2}{5}\log(a+b) - 4\log(a-b) - \frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)$$

Однако так подробно не следует каждый раз расписывать, а сразу следует применять свойства логарифмов и писать результат.

Например: $x = \frac{2a^{-5}b^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(a-b)^2}}{3(a-b)^4}$

$$\log x = \log 2 - 5\log a + \frac{2}{3}\log b + \frac{2}{3}\log(a-b) - \log 3 - 4\log(a-b)$$

Решим совместно (доска – группа)

№ 4.5; $\log y = \frac{2}{5}\log a + \frac{1}{15}\log(b+c) - \frac{3}{5}\log(a+b) + \frac{2}{5}\log b$

№ 4.6; $\log z = \frac{2}{3}\log a + \frac{1}{3}\log 4 - \frac{1}{3}\log b - \log 5 - \frac{1}{2}\log(a-b) - 2\log(a+b)$

№ 4.7; $\log x = -\frac{2}{3}\log a + 2\log b + \frac{1}{2}\log\left(a^2-b^2\right) - \log 2 - 2\log\cos\alpha =$

$$= -\frac{2}{3}\log a + 2\log b + \frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b) - \log 2 - 2\log\cos\alpha$$

№ 4.8; $\log x = \log 5 - 2\log m + \frac{1}{2}\log n + \log\sin 3\lambda - \log 3 - 2\log\sin\lambda - \frac{1}{2}\log\cos\lambda$

2. Потенцирование выражений

Действие нахождения числа по его логарифму называется действием потенцирования.

Как видно: потенцирование – есть обратное действие логарифмированию.

Пример. $\log x = \frac{2}{5}\log(a+b) - 2\log a - \frac{1}{2}\log b$

Знак минус говорит о том, что число представлено дробью, коэффициенты перед логарифмом – показатели степени.

И тогда $x = \frac{(a+b)^{\frac{2}{5}}}{a^2 \cdot b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[5]{(a+b)^2}}{a^2 \cdot \sqrt{b}}$;

5.1 $\quad x = \frac{a \cdot (a+b)^2}{\sqrt[3]{a-b}}$

5.3 $\quad x = (a+b)^{-1} \cdot \sqrt[5]{\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}}$

5.5 $\quad x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b^2}\right)^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$

5.7 $\quad x = \frac{(a-b)^3}{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{b}}} = \frac{(a-b)^3}{4\sqrt{a \cdot \sqrt{b}}}$

5.8 $\quad \log_{5,2} x = 0,38 \qquad x = 5,2^{0,38} = 1,871$

5.10 $\quad \lg x = -0,276 \qquad x = 10^{-0,276} = 0,530$

5.12 $\quad \ln x = 0,607 \qquad x = e^{0,607} = 1,835$

Контрольные вопросы:

1. Определение логарифма?
2. Какой логарифм называется десятичным? Натуральным?
3. Какие основные тождества логарифмирования вы знаете?
4. Какими свойствами обладают логарифмы?

Домашнее задание

Вычислить

а) $10^{2\lg 2-2}$ $\qquad \left(\frac{4}{100}\right)$

б) $6^{3\log 3+2}$ $\qquad (27\cdot 36)$

в) $\log_{25}\frac{1}{5}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)$

г) $\frac{\log_3 81}{\log_3 9}$ $\qquad (2)$

д) $10^{2-3\lg 5}$ $\qquad \left(\frac{100}{125}\right)$

е) $\frac{\lg 5}{\lg^{125-\lg 25}}$ $\qquad (1)$

ж) $\frac{\lg 8}{\lg 64 - \lg 4}$ $\qquad \left(\frac{9}{4}\right)$

Прологарифмировать $\quad x = \frac{\sqrt[6]{a} \cdot \hat{a}^3 \tilde{n}^4}{d^5}$

Найти $\boldsymbol{x}$, если

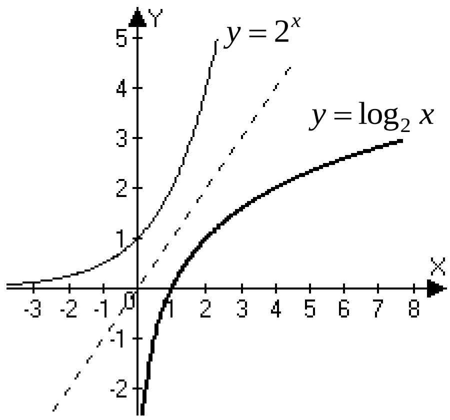
$$\lg x = 5\lg a - 3\lg \hat{a} + \lg c - \frac{1}{4}\lg d$$

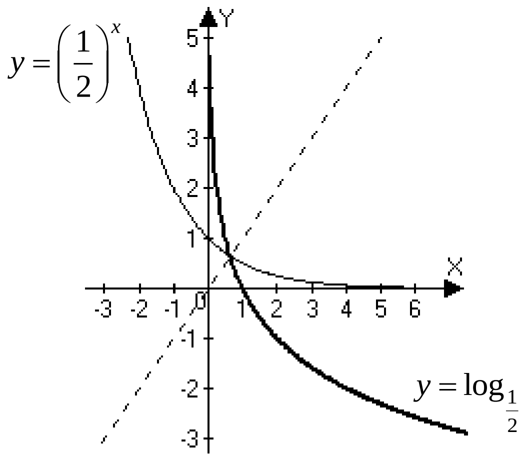
Урок № 17. 3.6.Логарифмическая функция, ее свойства и график.
План.

1. **Определение логарифмической функции.**
2. **Свойства логарифмической функции.**
3. **Упражнения.**

Функция, обратная показательной, называется логарифмической $y = a^x$, $a \neq 1$ и $a > 0$ – показательная функция $x = \log_a y$, поменяем местами x и y, получаем
$y = \log_a x, \quad a \neq 1, \qquad a > 0$ – это и есть логарифмическая функция.

Знаем, что графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Воспользовавшись этим свойством изобразим графики логарифмической функции при a > 1 и a < 1





Свойства

1. $D(y)$: $x \in (0; +\infty)$
2. $E(y)$: $y \in (-\infty; +\infty)$
2. при $x = 1 \quad y = 0$

Свойства (1 – 3) являются общими свойствами логарифмических функций и не зависят от основания (больше 1 или меньше 1).

Остальные свойства рассматриваются в зависимости от основания

a > 1	0 < a < 1
3. Функция монотонно возрастающая	4. Функция монотонно убывающая
4. При $0 < x < 1 \quad y < 0$ $x > 1 \quad y > 0$	5. При $0 < x < 1 \quad y > 0$ $x > 1 \quad y < 0$
5. При $x \to \infty$ $y \to \infty$	6. При $x \to \infty$ $y \to -\infty$
большему числу соответствует и больший логарифм	большему числу соответствует меньший логарифм

Используя свойства логарифмической функции (свойства логарифмов), определите знак числа

1. $\log_2 3$
2. $\log_{1,4} 0,72$
3. $\log_{0,34} 14,7$
4. $\log_{0,29} 0,786$

Ответы:
1. > 0
3. < 0

2. < 0 4. > 0

Сравните свои результаты.
Самостоятельно:

$\log_{2,3} 61,2$ $\log_{0,34} 18,6$

$\log_{1,94} 0,786$ $\log_{0,92} 0,0038$

Смотрим на основание (а 1 или а 1), а затем на число (х 1 или а х 1) и делаем вывод!

Урок №18. 3.7 Решение логарифмических уравнений и неравенств.

План.

1. Решение логарифмических уравнений на основе определения логарифма.
2. Решение логарифмических уравнений методом потенцирования.
3. Решение логарифмических уравнений приводимых к квадратным

Определение: Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими. Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений на примерах.

1. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+6\right)=-2$

По определению логарифма можно записать,

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=x^2+6$

$x^2+6=16$

$x^2+6-16=0$

$x^2-10=0$

$x=\pm\sqrt{10}$ надо помнить, что логарифма отрицательных чисел не существует. Так как $x^2+6>0$ всегда, то полученные значения $x=\pm\sqrt{10}$ оба являются корнями уравнения.

Ответ: $\pm\sqrt{10}$

2. $\lg(3x-2)+\lg 2=2-\lg(x+1)$

Используя определение логарифма, можно число 2 записать $2=\lg 100$ и тогда имеем равносильное уравнение $\lg(3x-2)+\lg 2=\lg 100-\lg(x+1)$. Применим свойства логарифмов и тогда $\lg((3x-2)\cdot 2)=\lg\frac{100}{x+1}$ отсюда следует, что $2(3x-2)=\frac{100}{x+1}$ решаем уравнение при $x\neq-1$

$2(3x-2)(x+1)=100$

$(3x-2)(x+1)=50$

$3x^2-2x+3x-2=50$

$3x^2+x-52=0$

$D=1+4\cdot3\cdot52=625$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm25}{6};\ x_1=4;\ x_2=-\frac{26}{6}=-\frac{13}{3}$

потенцирование выражений может привести к появлению посторонних корней, поэтому полученные корни нужно проверить.

Проверка:
$x = 4$

$\lg 10 + \lg 2 = \lg 100 - \lg 5$

$10 \cdot 2 = \frac{100}{5}$

$20 = 20$ верно.

$x = -\frac{13}{3}$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x = 4$.

Можно указать другой метод нахождения корней уравнения, основанный на предварительном нахождении всех значений *x*, для которых имеет смысл уравнение, то есть указать область допустимых значений переменной (ОДЗ).

По свойству логарифмов:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3} \qquad x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty \right)$$

и тогда можно сказать, что ОДЗ удовлетворяет корень *x* = 4. Проверив этот корень, получаем верное равенство.

<u>Замечание</u>. Пользоваться указанием ОДЗ удобно для более простых выражений, стоящих под знаком логарифма.

При решении уравнения применяется метод решения, известный как метод потенцирования.

4.
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) + 2 = -\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = -\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$
т.к. $2 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

Используя свойства логарифмов имеем $\log_{\frac{1}{2}}\left((2x-3)\cdot\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)^{-1}$

и тогда

$\frac{1}{4}(2x-3) = \frac{1}{x+2}, \qquad x \neq -2$

$\frac{1}{4}(2x-3)(x+2) = 1 \qquad\qquad (2x-3)(x+2) = 4$

$2x^2 - 3x + 4x - 6 - 4 = 0 \qquad\qquad 2x^2 + x - 10 = 0$

$D = 1 + 80 = 81$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{4}; \quad x_1 = 2; \; x_2 = -2{,}5$

Проверка:
$x = 2$

$\log_{\frac{1}{2}} 1 + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = -\log_{\frac{1}{2}} 4$

$1 \cdot \frac{1}{4} = 4^{-1}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ верно.

x = –2,5 – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x = 2$

5. $2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Известно, что $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ и тогда

$2 \cdot \dfrac{1}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1$ <u>ОДЗ</u>: $x > 0 \quad x \neq 1$

$2 - 3\left(\log_{25} x\right)^2 = \log_{25} x$

$3\log_{25}^2 x + \log_{25} x - 2 = 0$

Пусть $\log_{25} x = t,$ $\quad 3t^2 + t - 2 = 0$

$D = 1 + 24 = 25;$ $\quad t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{6};$

$t_1 = -1;$ $\quad t_2 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

И тогда $\log_{25} x = -1 \quad x = 25^{-1} = \dfrac{1}{25};$

Если $\log_{25} x = \dfrac{2}{3}$, то $x = 25^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} = 5^{1\frac{1}{3}} = 5\sqrt[3]{5}$

Ответ: $\dfrac{1}{25}; \quad 5\sqrt[3]{5}$

Урок № 19. 3.7.Решение неравенств.

План.

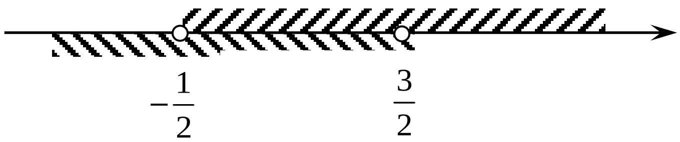
1. Решение логарифмических неравенств на основе определения логарифма.
2. Решение логарифмических неравенств методом потенцирования.

1) $\log_{\frac{1}{4}}(3-2x) > -1$, т.к. $-1 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{4}} 4 > 0$

$\log_{\frac{1}{4}}(3-2x) > \log_{\frac{1}{4}} 4$

Учитывая, что $\dfrac{1}{4} < 1$, то есть функция убывающая, имеем:

$\begin{cases} 3-2x < 4 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x < 4-3 \\ -2x > -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

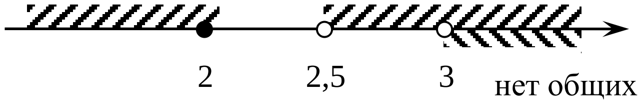


Ответ: $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$

2) $\log_3(2x-5) \le \log_3(x-3)$

Основания одинаковые, причём 3 > 1, следовательно

$\begin{cases} 2x-5 \le x-3 \\ 2x-5 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \begin{cases} x \le 2 \\ x > 2{,}5 \\ x > 3 \end{cases}$



нет общих значений x.

Ответ: неравенство не имеет решения.

<u>Самостоятельно</u>:

1) $\log_2(2x-6) = 4 - \log_2(x-6)$

Ответ: $x = 7{,}7$

2) $\log_4 x + \log_x 4 = 2{,}5$

3) $\left(\log_3 x\right)^2 + 4\log_{\frac{1}{3}} x + 3 = 0$

Ответ: $x=27;\ x=3$

4) $x^{\lg x}=10$

Ответ: 10; $0{,}1$.

5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)>\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

Ответ: пустое множество- Ø

6) $\log_{\frac{1}{3}}(2-5x)\ge -2$

Ответ: $(-\infty;1{,}4]$

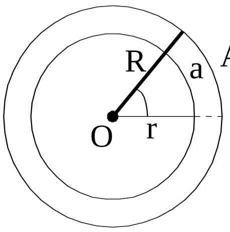
IV Раздел. Тригонометрические функции.

Урок № 22. 4.1.Тригонометрические функции числового аргумента. Вычисление значений тригонометрических выражений.

План

1. Определение тригонометрических функций острого угла.
2. Определение тригонометрических функций любого аргумента.
3. Знаки тригонометрических функций.
4. Периодичность тригонометрических функций.
5. Четность, нечетность тригонометрических функций.
6. Формулы приведения 6(а) таблица значений.
7. Тригонометрические тождества.

Любой угол измеряется либо в градусной мере измерения (единица измерения – градус), либо в радианной (единица измерения – радиан). Один дуговой градус – это $\frac{1}{360}$ часть окружности. Один угловой градус – это центральный угол, опирающийся на дуговой градус. Радианная мера угла – это отношение длины дуги к радиусу этой дуги. Радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, равную длине радиуса этой дуги. Окружность содержит 2π радиан.



$\frac{\cup A}{R}=\frac{\cup a}{r}...=const$ – радианная мера угла

$\frac{2\pi R}{R}=2\pi$ радиан

1 рад $=57^{\circ}17'45''\approx 57^{\circ}18'\approx 57{,}3^{\circ}$

Для перехода от градусной меры измерения угла к радианной и наоборот можно пользоваться формулами: $\begin{matrix}360^{\circ}-2\pi\\ A^{\circ}-\alpha\text{ рад}\end{matrix}\Rightarrow \boxed{A^{\circ}=\frac{180^{\circ}\cdot\alpha}{\pi}};\ \boxed{\alpha=\frac{A^{\circ}\cdot\pi}{180^{\circ}}}$

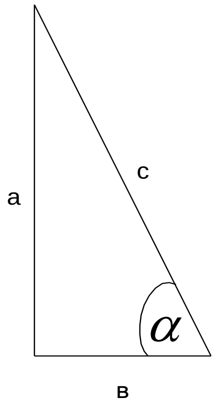
Например:

1) Дано: $\alpha=2{,}1$
Найти: $A^{\circ}-?$
$A^{\circ}=\frac{180^{\circ}\cdot 2{,}1}{\pi}=$

2) Дано: $A^{\circ}=17^{\circ}20'$
Найти: $\alpha-?$
$\alpha=\frac{17^{\circ}20'\cdot\pi}{180^{\circ}}=$

В прямоугольном треугольнике.

Для произвольного угла

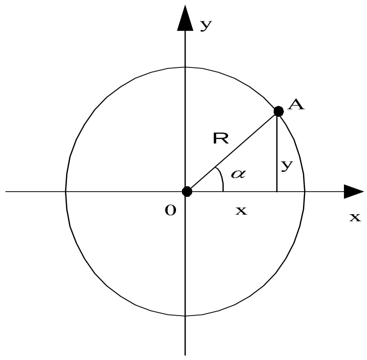


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$



$$R = 1;\quad \cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x};\quad ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Основные тригонометрические тождества

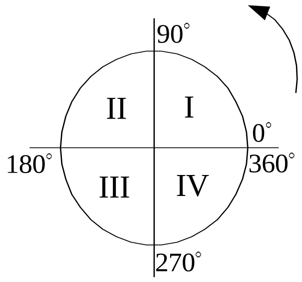
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$
$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$	$1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\dfrac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$

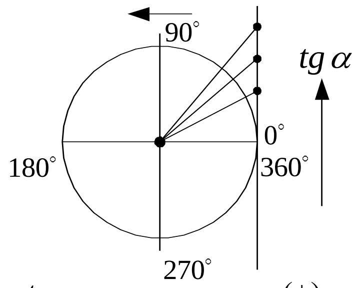
Из определения:

$|\sin\alpha| \le 1$ $\qquad |\sec\alpha| \ge 1$ $\qquad \left.\begin{matrix} tg\alpha \\ ctg\alpha \end{matrix}\right]$ любые значения

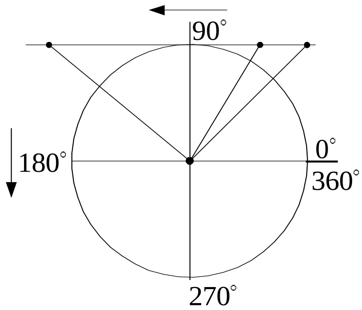
$|\cos\alpha| \le 1$ $\qquad |\operatorname{cosec}\alpha| \ge 1$

функции ограниченные





$tg\,\alpha$ всегда растет (+)



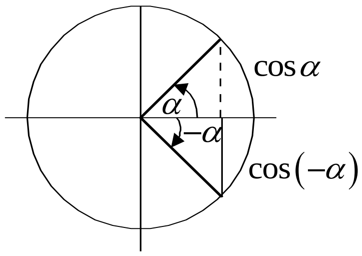
$ctg\,\alpha$ всегда убывает (+)

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Знаки функций по четвертям

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$tg\alpha$	+	–	+	–

$ctg\,\alpha$	+	–	+	–



$ctg\,\alpha$

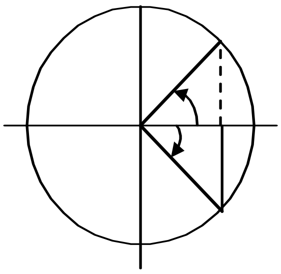
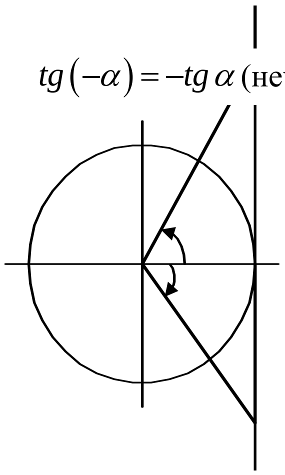
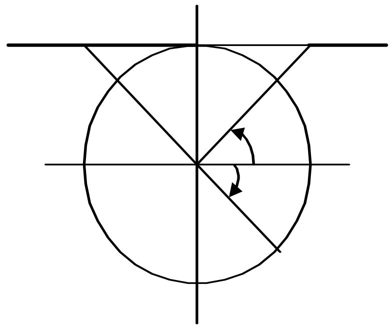
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (чётная функция)

$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$ (нечётная)

$-\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (нечётная)

$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$ (нечётная)

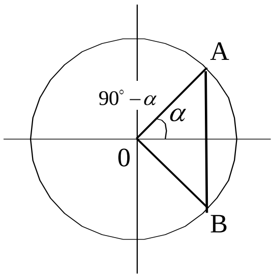
Урок № 23. Вычисление значений тригонометрических выражений.

Периодичность:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+360^\circ)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360^\circ)&=\cos\alpha\end{aligned}\right] T=360^\circ - \text{период}$$

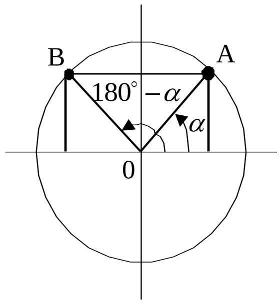
$$\left.\begin{aligned}tg(\alpha+180^\circ)&=tg\alpha\\ ctg(\alpha+180^\circ)&=ctg\,\alpha\end{aligned}\right] T=180^\circ - \text{период}$$

Формулы приведения:



$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$



$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$

1) Знак результата берется по знаку данной функции в зависимости от четверти.
2) Если острый угол берется при горизонтальном диаметре, т.е. $\left(180^\circ \pm \alpha\right)$ и $\left(360^\circ \pm \alpha\right)$, то название функции не изменяется; если при вертикальном, т.е. $\left(90^\circ \pm \alpha\right)$ и $\left(270^\circ \pm \alpha\right)$, то название функции изменяется на сходную.

Например:

$\sin\left(180^\circ + \alpha\right) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\sin\left(270^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(90^\circ + \alpha\right) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\cos\left(360^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$

$tg\left(180^\circ - \alpha\right) = -tg\,\alpha$ $\quad$ $ctg\left(90^\circ + \alpha\right) = -tg\,\alpha$

Решить:

1) $\dfrac{4 - 2tg^2 45^\circ + ctg^4 60^\circ}{3\sin^3 90^\circ - 4\cos^2 60^\circ + 4ctg^2 45^\circ}$

2) $\dfrac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^3 - \left(ctg\dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\sin 0^\circ\right)^2}{\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + 2\sin\dfrac{\pi}{6} + 2\cos^2\dfrac{\pi}{4}}$

Решение:

1) $\dfrac{4 - 2\cdot 1 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4}{3\cdot 1^3 - 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot 1^2} = \dfrac{4 - 2 + \dfrac{9}{81}}{3 - 1 + 4} = \dfrac{2 + \dfrac{1}{9}}{6} = \dfrac{19}{9\cdot 6} = \dfrac{19}{54}$;

2) $\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 1^3 + 0}{0 + 2\cdot\dfrac{1}{2} + 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{4} - 1}{1 + 1} = \dfrac{-\dfrac{3}{4}}{2} = -\dfrac{3}{8}$

Упростить:

1) $\dfrac{\sin\left(180^\circ - \alpha\right)\cdot\cos\left(90^\circ + \alpha\right)}{\cos\left(360^\circ - \alpha\right)\cdot\sin\left(270^\circ - \alpha\right)} = \dfrac{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)} = \dfrac{-\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha} = tg^2\alpha$

2) $\dfrac{\sin\left(\alpha - \pi\right) + \cos\left(\alpha - \dfrac{3}{2}\pi\right)}{ctg\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) - tg\left(\pi + \alpha\right)} = \cos\alpha$

3) $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi + \alpha\right)\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + ctg\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right) = tg\,\alpha$

Домашнее задание

Дано:

α из I четв.

Опр. tgα, cosα, ctgα

Ответ: cosα=0.6

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ $\quad$ $\text{ñtg}\alpha = \dfrac{3}{4}$

Дано: ctgα=3

Опр. tgα, sinα, cosα

Ответ: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ $\quad$ $\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

Доказать тождества:

1) $(1+ctg^2)\cdot\sin^2\alpha=1$
2) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$
4) $\dfrac{ctg\alpha-\cos\alpha}{ctg\alpha}=1-\sin\alpha$

Урок №24 (2). 4.2 Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

План.

1. Формулы суммы, разности двух углов.
2. Формулы двойного угла.
3. Формулы половинного угла.
4. Преобразование суммы, разности двух функций в произведение.
5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму, разность.
6. Решение упражнений.
7. Доказательство тригонометрических тождеств.

1) Повторить формулы:

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$
$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$
$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$
$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$
$$\boxed{tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}$$

При α = β имеем $\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ $\boxed{tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

Имеем: $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$ $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\cos\alpha$

И тогда $\boxed{1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$ $\boxed{1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\boxed{tg\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$ или $\boxed{tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$

2) Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций (повторить).

$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$ $\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{a-\beta}{2}} \qquad \boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boxed{tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \quad \boxed{ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}} \quad \boxed{ctg\,\alpha-ctg\,\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$$

Например:

1) $\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=2\sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2}=2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha$

2) $\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=ctg^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ 3) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=ctg\alpha\cdot ctg\beta$

Решение примеров:

1) Вычислить: $\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ$ не применяя МК.

Применяем формулу $\cos(\alpha+\beta)$

и тогда $\cos 43^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 43^\circ\cdot\sin 17^\circ=\cos\left(43^\circ+17^\circ\right)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

Аналогично: $\sin 57^\circ\cdot\cos 12^\circ-\cos 57^\circ\cdot\sin 12^\circ=\sin\left(57^\circ-12^\circ\right)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Доказать: $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=tg(\alpha+\beta)$

Действительно: $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$

(использовали формулы $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$)

$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)$

3) Доказать: $\sin 2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 8\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 8\alpha$

при решении использованы формулы $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$; $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$

4) Дано: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $\cos\beta=-\frac{3}{4}$ $180^\circ<\beta<270^\circ$

Найти: $\sin(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha+\beta)$

Запишем формулы:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Видим, что надо найти функции $\cos\alpha$ и $\sin\beta$. Используя, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ имеем

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, т.к. $90^\circ<\alpha<180^\circ$ (II четверть)

Аналогично: $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta$

$\sin^2\beta = 1-\dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$; $\sin\beta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, т.к. $180^\circ < \beta < 270^\circ$ (III четверть)

и тогда:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{9}{20}+\frac{4\sqrt{7}}{20} = -\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{12}{20}+\frac{3\sqrt{7}}{20} = \frac{12+3\sqrt{7}}{20}$$

Преобразовать в сумму или разность:

5), 6)

$$\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ = \frac{1}{2}\left(\sin 90^\circ - \sin 60^\circ\right)$$

$$\sin 7\alpha\cdot\cos 3\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin 10\alpha + \sin 4\alpha\right)$$

7), 8)

$$\cos 2x\cdot\cos 6x = \frac{1}{2}\left(\cos 8x + \cos 4x\right)$$

$$\sin 5\beta\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos 7\beta - \cos 3\beta\right)$$

Самостоятельно:

1) $tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2tg\alpha$

2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha} = tg3\alpha$

3) Преобразовать в сумму или разность функций

$\sin 6\alpha\cdot\cos 9\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\sin 15\alpha - \sin 3\alpha\right)$; $\cos 4\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\cos 5\alpha + \cos 3\alpha\right)$

Урок № 26.

4.3 Свойства и графики тригонометрических функций.

План.

1.Изучение свойств тригонометрических функций.

2. Четность (нечетность).

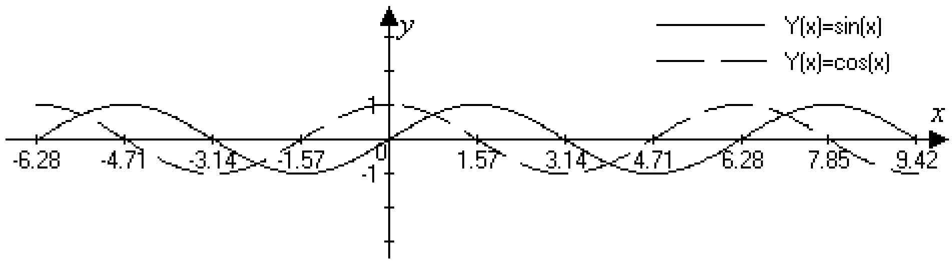
3. Период

4.Построение графиков тригонометрических функций.

1. Функция **y=sinx** называется тригонометрическим синусом.

Свойства:

1. Область определения функции: $x\in(-\infty,\infty)$
2. Множество значений функции: $y\in[-1;1]$
3. Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$
4. Периодичная функция: $T = 2\pi$
5. Точки пересечения с координатными осями:
$Ox\cap(\pi n,0)$; $Oy\cap(0,0)$
6. Функция не монотонная: $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ возрастает, $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ убывает.
7. График функции синусойда.



2. Функция **y=cosx** называется тригонометрическим косинусом.
Свойства:

1. Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$
2. Множество значений функции: $y \in [-1;1]$
3. Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$
4. Периодичная функция: $T = 2\pi$
5. Точки пересечения с координатными осями:
$Ox \cap \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 0\right)$; $Oy \cap (0,1)$
6. Функция не монотонная: убывает, возрастает.
7. График функции косинусойда.

3. Функция **y=tgx** называется тригонометрическим тангенсом.
Свойства:

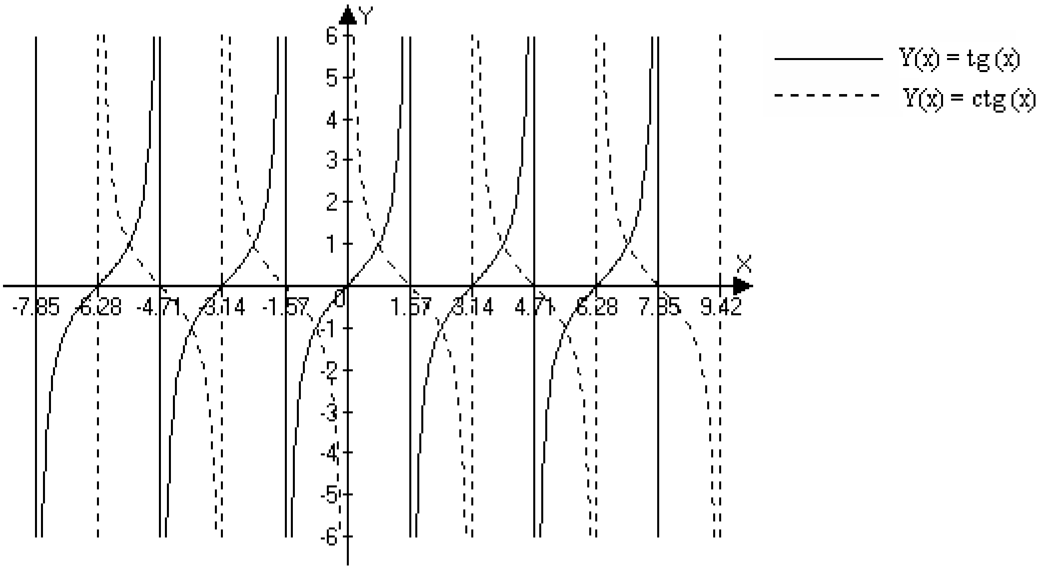
1. Область определения функции: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
2. Множество значений функции: $y \in (-\infty, \infty)$
3. Функция нечетная: $tg(-x) = -tgx$
4. Периодичная функция: $T = \pi$
5. Точки пересечения с координатными осями:
$Ox \cap (\pi n, 0)$; $Oy \cap (0,0)$
6. Функция не монотонная: убывает, возрастает.
7. График функции тангенсойда.

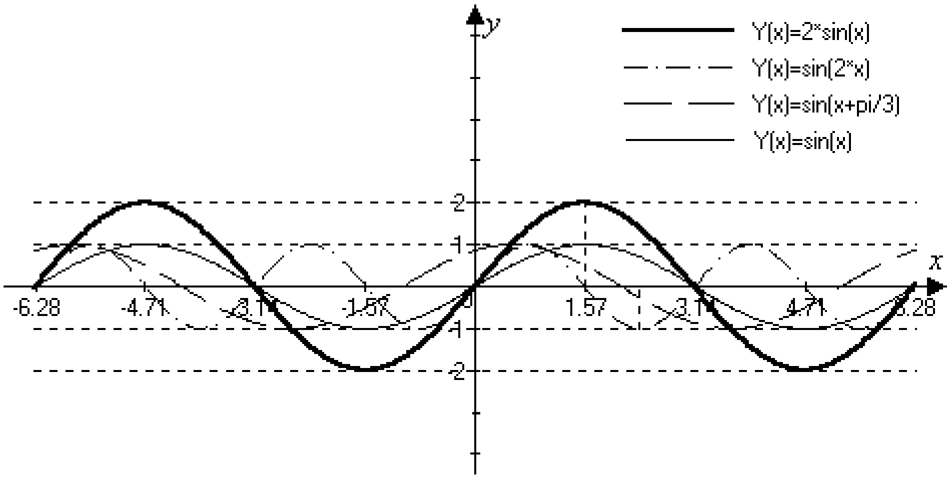
4. Функция **y=ctgx** называется тригонометрическим котангенсом.
Свойства:

1. Область определения функции: $x \in (\pi n, \pi + \pi n)$
2. Множество значений функции: $y \in (-\infty, \infty)$
3. Функция нечетная: $\tilde{n}tg(-x) = -\tilde{n}tgx$
4. Периодичная функция: $T = \pi$
5. Точки пересечения с координатными осями:
$Ox \cap \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, 0\right)$.
6. Функция не монотонная: убывает, возрастает.
7. График функции котангенсойда.

$$y = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$y = ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0, x \neq \pi n, n \in Z$$





$y = A\sin x$ А – амплитуда колебания

$y = \sin \omega x$ w – частота колебания $\begin{array}{ll} w>1 & \text{сжатие} \\ w<1 & \text{растяжение} \end{array}$ вдоль оси Ox

$y = \sin(x+\varphi)$ φ – начальная фаза колебания (сдвиг по оси Ox $\begin{array}{l} \text{вправо при } \varphi<0 \\ \text{влево при } \varphi>0 \end{array}$ на φ)

$y = A\sin(\omega x+\varphi)$ – функция гармонического колебания

<u>Самостоятельно</u>:

Построить график функции:

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ $y = 2\cos x$

$y = \sin\frac{1}{2}x$

Урок № 27

4.4 Обратные тригонометрические функции.

План.

1. Определения обратнотригонометрических функций.
2. Свойства обратнотригонометрических функций.
3. Графики обратнотригонометрических функций.

1) $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$ не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции $y = \arcsin x$ является отрезок $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Итак: $y = \sin x$ $\quad x = \arcsin y \quad$ $y = \arcsin x$

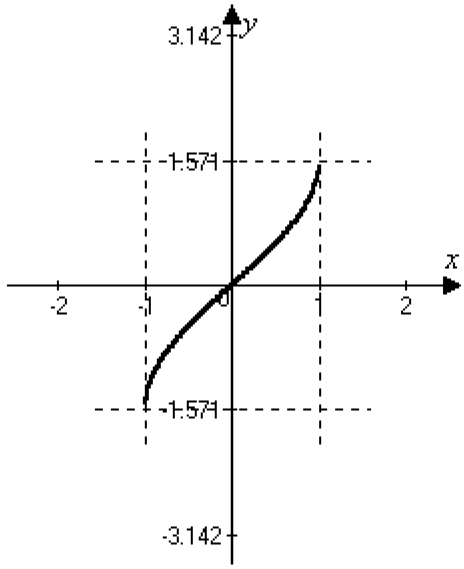
Свойства функции $y = \arcsin x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонно возрастает $[-1;1]$



Например:

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin \dfrac{1}{2}$

$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$

$\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\dfrac{\pi}{4}$

$\arcsin 0 = 0$

$\arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$

$\arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$

2) $y = \arccos x$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ Промежуток монотонности $0 \le x \le \pi$

$y = \arccos x$

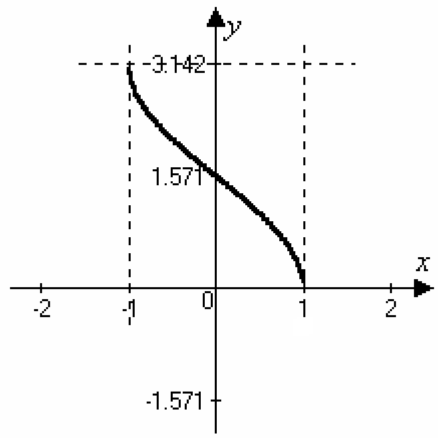
Свойства функции $y = \arccos x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in [0; \pi]$

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция монотонно убывает $[-1;1]$



Например:

$\arccos \dfrac{1}{2} = 60^\circ$ или $\dfrac{\pi}{3}$

$\arccos(-1) = 180^\circ$ или π

$\arccos 0 = 90^\circ$ или $\dfrac{\pi}{2}$

$\arccos 0,708 = 44^\circ 55'$

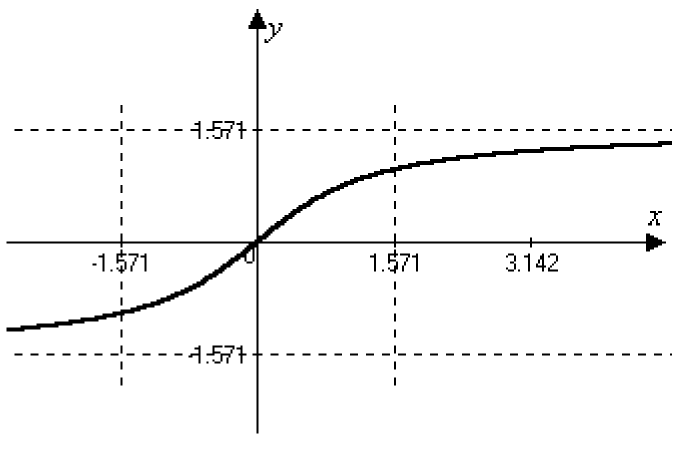
$\arccos 0,112 = 83^\circ 34'$

3) $y = arctgx$

Промежуток монотонности $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

$y = tgx$

$x = arctgy \qquad y = arctgx$



Свойства функции $\underline{y = arctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3) $arctg(-x) = -arctgx$

4) Функция монотонно возрастает $(-\infty; +\infty)$

Например:

$arctg1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $arctg2 = 63^\circ 26'$

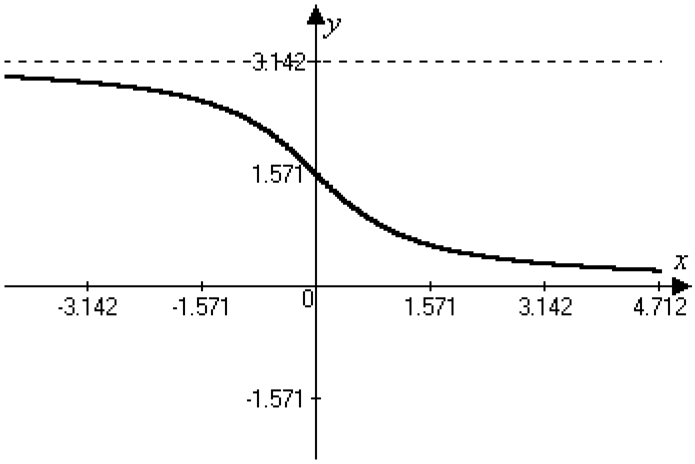
$arctg\sqrt{3} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $arctg14,7 = 86^\circ 11'$

4) $y = arcctgx$

Промежуток монотонности $0 < x < \pi$

$y = ctgx$

$x = arcctgy$ $\qquad$ $\underline{y = arcctgx}$



Свойства функции $\underline{y = arcctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in (0; \pi)$

3) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

4) Функция монотонно убывает $(-\infty; +\infty)$

Например:

$arcctg1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $arcctg4,7 = 12^\circ$

$arcctg\sqrt{3} = 30^\circ$ или $\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $arcctg10,8 = 5^\circ 17'$

Используя свойства обратных функций, найдем углы:

$\arcsin 0,264$	$\arccos 0,314$	$arctg(-0,308)$	$arcctg(-2,76)$
$\arcsin(-0,812)$	$\arccos(-0,768)$	$arctg17,8$	$arcctg(-12,7)$

5) Выполнение простейших тригонометрических операций над arc-функциями может быть определена формулами:

$\sin(\arcsin x) = x$ $\qquad$ $\cos(\arccos x) = x$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\qquad$ $\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$\sin(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\qquad$ $\cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$tg\left(arctgx\right)=x$ $\qquad$ $ctg\left(arcctgx\right)=x$

$tg\left(\arcsin x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $ctg\left(\arcsin x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$tg\left(\arccos x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\qquad$ $ctg\left(\arccos x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$tg\left(arcctgx\right)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $ctg\left(arctgx\right)=\dfrac{1}{x}$

Между arc-функциями существуют основные соотношения:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим примеры:

1) Вычислить: $\sin\left(2\arccos 0,796\right)$

Можно рассматривать как $\sin 2\alpha$ и находить по формуле

$$\sin\left(2\arccos 0,796\right)=2\sin\left(\arccos 0,796\right)\cdot\cos\left(\arccos 0,796\right)=2\sqrt{1-0,796^2}\cdot 0,796=0,964$$

а проще:

$$\sin\left(2\arccos 0,796\right)=\sin\left(2\cdot 37^{\circ}15'\right)=0,963$$

(погрешность вычисления вполне допустимая)

Используя МК имеем:

$$\sin\left(arctg 2,76+\arccos\left(-0,786\right)\right)=-0,528$$

2) $tg\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-0,704\right)-\arcsin\left(-0,236\right)\right)=-0,629$

<u>Самостоятельно</u>:

Вычислить, используя МК:

$\arcsin\left(-0,389\right)$ $\qquad$ $\arccos\left(-0,618\right)$

$arctg 7,24$ $\qquad$ $arcctg 0,608$

Урок № 28.

4.5 Простейшие тригонометрические уравнения и их решение.

План.

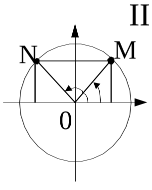
1. Определение тригонометрических функций любого угла.
2. Повторить числовые значения некоторых углов тригонометрических функций.
3. Повторить обратные тригонометрические функции.

Вывести формулы решения тригонометрических уравнений

Уравнения вида $\sin x=a;\ \cos x=a;\ tgx=a;\ \ ctgx=a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

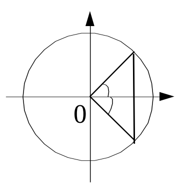
1) $\sin x=a \qquad \left|a\right|\le 1$

II ч. $180^{\circ}-x=\arcsin a+360^{\circ}\cdot n$



отсюда

2) $\cos x=a \qquad \left|a\right|\le 1$



$x=\arccos a+2\pi n$ $\Rightarrow$

$-x=\arccos a+2\pi n$

$\boxed{x=\pm\arccos a+2\pi n; n\in Z}$

$x = 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

I ч. $x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$$

Например:

Например:

$\sin x = 0,437$

$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in Z$

$x = (-1)^n 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in Z$

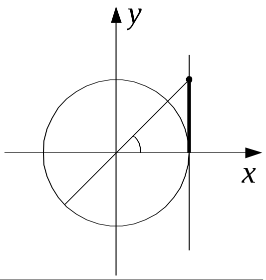
$\cos 4x = -0,712$

$4x = \pm \arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in Z$

$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = \pm 33^\circ 51' + 90^\circ \cdot n, n \in Z$

3) $tgx = a$; а – любое значение



$$\boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$$

Например:

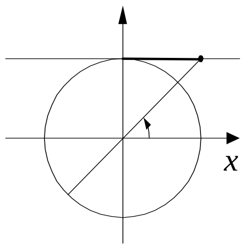
$tg\dfrac{x}{2} = 4$

$\dfrac{x}{2} = arctg 4 + \pi n, n \in Z$

$\dfrac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 151^\circ 54' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

4) $ctgx = a$; а – любое значение



$$\boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$$

Например:

$ctg 3x = 4,72$

$3x = arcctg 4,72 + \pi n, n \in Z$

$3x = 11^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 3^\circ 59' + 60^\circ \cdot n, n \in Z$

Решить уравнения:

1) $\sin 2x = -0,72$ 2) $ctg\left(\dfrac{x}{2} + 20^\circ\right) = 0,34$ 3) $\cos\dfrac{x}{4} = -0,318$

4) $tg\left(\dfrac{\pi}{6} - 5x\right) = 1$ 5) $\cos(2x - 3,4) = 0,112$

Решения уравнений:

1) $2x = (-1)^n \arcsin(-0,72) + \pi n, n \in Z$

$2x = (-1)^n \arcsin(-46^\circ 03') + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$2x = (-1)^{n+1} \cdot 46^\circ 03' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \cdot 23^\circ 02' + 90^\circ \cdot n\ n \in Z$

2) $\dfrac{x}{2} + 20^\circ = arcctg 0,34 + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$

$\dfrac{x}{2} + 20^\circ = 71^\circ 13' + 180^\circ \cdot n,\ \ n \in Z$

$\dfrac{x}{2} = 51^\circ 13' + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$

$x = 102^\circ 26' + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$

3) $\frac{x}{4}=\pm\arccos(-0,318)+2\pi n,\ n\in Z$

$\frac{x}{4}=\pm 108^\circ 32'+360^\circ\cdot n,\ n\in Z$

$x=\pm 434^\circ 8'+1440^\circ\cdot n,\ n\in Z$

4) $\frac{\pi}{6}-5x=arctg1+\pi n,\ n\in Z$

$\frac{\pi}{6}-5x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

$-5x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

$-5x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$

$x=-\frac{\pi}{60}-\frac{\pi}{5}n,\ n\in Z$

5) Решаем в радианной мере измерения

$2x-3,4=\pm\arccos 0,112+\pi n,\ \ n\in Z$

$2x-3,4=\pm 1,459+\pi n,\ \ n\in Z$

$2x=\pm 1,459+3,4+\pi n,\ \ n\in Z$

распишем два случая:

$2x_1=1,459+3,4+\pi n,\ \ n\in Z$

$2x_1=4,859+\pi n,\ \ n\in Z$

$x_1=2,4295+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z$

$x_1=2,43+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ \ n\in Z$

или

$2x_2=-1,459+3,4+\pi n,\ \ n\in Z$

$2x_2=1,941+\pi n,\ \ n\in Z$

$\boxed{x_2=0,97+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ \ n\in Z}$

Ответ: $x_1=2,43+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ \ n\in Z$ $\qquad x_2=0,97+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ \ n\in Z$.

<u>Самостоятельно</u>:

$\sin 4x=-0,24$ $\qquad tg\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=0$

$\cos\frac{x}{2}=-0,69$

$ctg\left(\frac{x}{2}-40^\circ\right)=2,3$ $\qquad \cos(2x-3,2)=0,119$

Урок № 29.

4.6 Решение уравнений, приводимых к одной функции.

План.

1. Повторить формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Решение упражнений.

Решение тригонометрических уравнений:

1) $2\sin^2 x+5\cos x=4$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x=1-\cos^2 x$:

$2\left(1-\cos^2 x\right)+5\cos x=4$

$2-2\cos^2 x+5\cos x-4=0$

$-2\cos^2 x+5\cos x-2=0$

$2\cos^2 x-5\cos x+2=0$

Пусть $\cos x=t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ $\qquad D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$; $\quad t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = 2$

решаем их, применяя формулу решения уравнения $\underline{\sin x = a}$

$\boxed{\sin x \neq 2 \text{ уравнение не имеет решения, т.к. } |\sin x| \leq 1}$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

И тогда, ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2) $2\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 2 = 0$

функции имеют разные углы, приведем к одному углу, используя формулы приведения:

$2\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$

учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, имеем:

$2\left(1 - \cos^2 x\right) - 5\cos x - 2 = 0$ $\qquad 2\cos^2 x + 5\cos x = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 2 = 0$ $\qquad \cos x\left(2\cos x + 5\right) = 0$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$\cos x = 0$ $\qquad 2\cos x + 5 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\quad$ и $\quad \cos x \neq -\frac{5}{2}$ – уравнение не имеет решения, т.к. $|\cos x| \leq 1$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

3) $tg^3 x = tgx$

$tg^3 x - tgx = 0$

$tgx\left(tg^2 x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$tgx = 0$

$x = \pi n, n \in Z$ $\quad$ и $\quad tg^2 x - 1 = 0; tg^2 x = 1$ и тогда $tgx = \pm 1$ $\qquad x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z; \quad x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$.

4) $\sin 7x + \sin 2x = 0$

левую часть уравнения можно преобразовать в произведение, используя формулу

$$\sin\alpha + \sin\beta = \ = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2\sin\frac{7x + 2x}{2} \cdot \cos\frac{7x - 2x}{2} = 0$$

$2\sin\frac{9}{2}x \cdot \cos\frac{5}{2}x = 0$ и тогда

$\sin\frac{9}{2}x = 0$ $\qquad$ или $\qquad \cos\frac{5}{2}x = 0$

$\frac{9}{2}x=\pi n, n\in Z$ $\quad\quad$ $\frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

$x=\frac{2}{9}\pi n, n\in Z$ $\quad\quad$ $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z$

Ответ: $x=\frac{2}{9}\pi n, n\in Z$ $\quad\quad$ $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z$.

5) $4\cos^3 x+4\cos^2 x-3\cos x-3=0$

левую часть можно преобразовать в произведение, используя способ группировки:

$\left(4\cos^3 x+4\cos^2 x\right)-\left(3\cos x+3\right)=0$

$4\cos^2 x\left(\cos x+1\right)-3\left(\cos x+1\right)=0$

$\left(\cos x+1\right)\left(4\cos^2 x-3\right)=0$

и тогда

$\cos x+1=0$ $\quad$ или $\quad$ $4\cos^2 x-3=0$

$\cos x=-1$ $\quad\quad$ $\cos^2 x=\frac{3}{4}$

$x=\pi+2\pi n, n\in Z$ $\quad\quad$ $\cos x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z$

Ответ: $x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z$ $\quad\quad$ $x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

Урок №30 (2)

4.7 Решение однородных тригонометрических уравнений.

План.

1. **Определение однородных тригонометрических уравнений.**
2. **Решение упражнений.**

1) Рассмотрим уравнение $\sin^2 x-10\sin x\cdot\cos x+21\cos^2 x=0$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо каждый член уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$ в той степени, какова степень уравнения:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{10\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}+\frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$tg^2x-10tgx+21=0,$

решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx=t$, тогда

$t^2-10t+21=0$

$D=100-84=16$

$t_{1,2}=\frac{10\pm 4}{2};\quad t_1=7;\quad t_2=3$

тогда $tgx=7$ $\quad\quad$ $tgx=3$

$x=arctg7+\pi n, n\in Z$ $\quad\quad$ $x=arctg3+\pi n, n\in Z$

$x=81^\circ 52'+180^\circ n, n\in Z$ $\quad\quad$ $x=71^\circ 33'+180^\circ n, n\in Z$

Ответ: $\underline{x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z}$ $\qquad x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$.

2) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим $2 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.

Имеем:

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

разделим на $\cos^2 x$

$$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$$

$$tgx = t; \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}; \quad t_1 = 3; t_2 = 1$$

$tgx = 3$

$x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

$\underline{x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z}$

$tgx = 1$

$\underline{x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z}$

Ответ: $x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Итак, мы рассмотрели уравнения, приводимые к одному аргументу, квадратному уравнению; левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю – однородные тригонометрические уравнения.

Решите:

1) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$

Ответ: x = π/4 + πn, n Є Z.

2) $2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$

Ответ: x =arctg2+ πn, n Є Z, x = π/4 + πn, n Є Z.

3) $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$

Ответ: x =arctg3 + πn, n Є Z, x =arctg7 + πn, n Є Z.

4) $2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = \sin^2 x$

Ответ: x =arctg3+ πn, n Є Z, x = - π/4 + πn, n Є Z.

Самостоятельно:

$$1)\, 3\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - \cos x = 0 \qquad 2)\, \sin 6x - \sin 4x = 0$$

$$3)\, \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$$

Урок № 33.

4.8 Решение различных типов тригонометрических уравнений.

План.

1. Повторить метод разложения многочленов на множители методом группировки.
2. Повторить основные формулы тригонометрии.
3. Решить уравнения

Итак, на прошлых занятиях рассмотрены: 1) простейшие тригонометрические уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a, tgx = a, ctgx = a$; 2) уравнения, приводимые к квадратным, однородные.

А сейчас рассмотрим уравнение линейное относительно $\sin x$ и $\cos x$, которое имеет вид $a\sin x + b\cos x = c$. Надо помнить, что уравнение имеет решение, если $c^2 \le a^2 + b^2$. Это уравнение можно решать: 1) выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$, приводим уравнение к квадратному относительно $tg\frac{x}{2}$; 2) введением вспомогательного угла.

Рассмотрим на конкретном примере:

1) $8\sin x + 3\cos x = 5$

проверим условие $c^2 \le a^2 + b^2$; действительно 25 < 64 + 9 $\Rightarrow$ уравнение имеет решение.

Первый способ.

$$8 \cdot \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} + 3\frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = 5 \qquad 16tg\frac{x}{2} + 3 - 3tg^2\frac{x}{2} = 5 + 5tg^2\frac{x}{2}$$

$$8tg^2\frac{x}{2} - 16tg\frac{x}{2} + 2 = 0 \qquad 4tg^2\frac{x}{2} - 8tg\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = t \; 4t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = 64 - 16 = 48$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$t_1 = 1{,}87 \qquad t_2 = 0{,}134$$

имеем:

$$tg\frac{x}{2} = 1{,}87 \qquad \text{и} \qquad tg\frac{x}{2} = 0{,}134$$

$$\frac{x}{2} = arctg1{,}87 + \pi n, n \in Z \qquad \frac{x}{2} = arctg0{,}134 + 180^\circ k, k \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 61^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z \qquad \frac{x}{2} = 7^\circ 38' + 180^\circ k, k \in Z$$

$$x = 123^\circ 44' + 360^\circ n, n \in Z \qquad x = 15^\circ 16' + 360^\circ k, k \in Z$$

Ответ: $x = 123^\circ 44' + 360^\circ n, n \in Z$; $x = 15^\circ 16' + 360^\circ k, k \in Z$.

Второй способ.(Дополнительно)

$8\sin x + 3\cos x = 5$

$25 < 64 + 9$ *– уравнение имеет решения*

Найдем $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

Разделим каждый член уравнения на $\sqrt{73}$

$$\frac{8}{\sqrt{73}}.\sin x + \frac{3}{\sqrt{73}}\cos x = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

Заметим, что $\frac{8}{\sqrt{73}} < 1$ *и* $\frac{3}{\sqrt{73}} < 1$, *а вот* $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2 = \frac{64}{73} + \frac{9}{73} = 1.$

Из этого следует, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$*, где* φ *– вспомогательный угол.*

Для нашего уравнения $\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{73}};\quad \sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{73}}$ *; отсюда* $\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}$.

Наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x=\frac{5}{\sqrt{73}}$$

левая часть уравнения – это $\sin\left(x+\varphi\right)$ *и значит получаем*

$$\sin\left(x+\varphi\right)=\frac{5}{\sqrt{73}}$$

$$x+\varphi=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{73}}+\pi n,n\in Z$$

$$x=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{73}}-\varphi+\pi n,n\in Z$$

$$x=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{73}}-\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}+\pi n,n\in Z$$

Найдем углы

$$x=\left(-1\right)^n 35^\circ49'-20^\circ33'+180^\circ n,n\in Z$$

Если дать значения $n=0,1,2,3...$*, то получим те же углы, что и в первом случае.*

Ваше желание, какому способу отдать предпочтение.

Решим ещё: 2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ проверим условие: $1<3+1$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2;\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1$$

$$\cos30^\circ\cdot\sin x-\sin30^\circ\cdot\cos x=1$$

$\sin\left(x+30^\circ\right)=1$ – частный случай $\Rightarrow$

$$x+30^\circ=90^\circ+360^\circ n,n\in Z$$

$$x=60^\circ+360^\circ n,n\in Z$$

Итак, что можно сказать о решении тригонометрических уравнений?

Наиболее применимы два метода:

1) привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому различными методами, в зависимости от условия.
2) Метод разложения на множители, это общий метод решения многих уравнений. Суть его в том, что перенеся все члены в одну часть, надо постараться разложить её на множители. Таким образом решение уравнения сводится к решению совокупности простейших уравнений.

Продолжим решение тригонометрических уравнений различных видов.

3) $\cos15x=\sin5x$

$$\cos15x-\sin5x=0$$

$$\cos15x-\cos\left(90^\circ-5x\right)=0$$

применяем формулу $\cos\alpha-\cos\beta$

$$-2\sin\frac{15x+90^\circ-5x}{2}\cdot\sin\frac{15x-90^\circ+5x}{2}=0$$

$$-2\sin\frac{10x+90^\circ}{2}\cdot\sin\frac{20x-90^\circ}{2}=0$$

$$-2\sin\left(5x+45^\circ\right)\cdot\sin\left(10x-45^\circ\right)=0$$

и тогда:

$\sin\left(5x+45^\circ\right)=0$	$\sin\left(10x-45^\circ\right)=0$
$5x+45^\circ=180^\circ\cdot n, n\in Z$	$10x-45^\circ=180^\circ\cdot k, k\in Z$
$5x=-45^\circ+180^\circ\cdot n, n\in Z$	$10x=45^\circ+180^\circ\cdot k, k\in Z$
$\underline{x=-9^\circ+36^\circ n, n\in Z}$	$\underline{x=4^\circ30'+18^\circ\cdot k, k\in Z}$

Ответ: $\underline{x=-9^\circ+36^\circ n, n\in Z}$; $\underline{x=4^\circ30'+18^\circ\cdot k, k\in Z}$.

4) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$ левая часть уравнения это формула

$$2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}$$

$$2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0 \;\Rightarrow\; 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$\sin\frac{x}{2}=0$	$\sin\frac{x}{2}-1=0$
	$\sin\frac{x}{2}=1$
$\frac{x}{2}=\pi n, n\in Z$	$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$
$\underline{x=2\pi n, n\in Z}$	$\underline{x=\pi+4\pi k, k\in Z}$

Ответ: $\underline{x=2\pi n, n\in Z}$ $\underline{x=\pi+4\pi k, k\in Z}$.

5) $\sin\left(30^\circ+x\right)+\sin\left(30^\circ-x\right)=\frac{1}{2}$

применим формулу $\sin\alpha+\sin\beta$ к левой части уравнения:

$$2\sin\frac{30^\circ+x+30^\circ-x}{2}\cdot\cos\frac{30^\circ+x-30^\circ+x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2\sin 30^\circ\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2};\qquad x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

6) $\cos\left(x-70^\circ\right)=\sin\left(x+70^\circ\right)$

$$\cos\left(x-70^\circ\right)-\sin\left(x+70^\circ\right)=0$$

Учитывая, что $\cos\alpha=\sin\left(90^\circ-\alpha\right)$ заменим $\sin\left(x+70^\circ\right)$ на $\cos\left(90^\circ-x-70^\circ\right)=\cos\left(20^\circ-x\right)$, тогда $\cos\left(x-70^\circ\right)-\cos\left(20^\circ-x\right)=0$.

Применяем формулу $\cos\alpha-\cos\beta$ и получим

$$-2\sin\frac{x-70^\circ+20^\circ-x}{2}\cdot\sin\frac{x-70^\circ-20^\circ+x}{2}=0 \qquad -2\sin\frac{-70^\circ}{2}\cdot\sin\frac{2x-90^\circ}{2}=0$$

$$2\sin 35^\circ\cdot\sin\left(x-45^\circ\right)=0$$

$2\sin 35^\circ\neq 0$, то $\sin\left(x-45^\circ\right)=0$

$x-45^\circ=180^\circ n, n\in Z$

$x=45^\circ+180^\circ n, n\in Z$

7) $\cos 3x+\sin 2x\cdot\sin x=0$

$$\cos 3x-\frac{1}{2}\left(\cos 3x-\cos x\right)=0 \qquad \frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$$

$$\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0 \qquad \frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)=0$$

$$\cos 3x+\cos x=0 \qquad 2\cos 2x\cdot\cos x=0 \qquad \cos 2x\cdot\cos x=0$$

$\cos 2x=0$ $\qquad$ $\cos x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

8) $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+3\cos\left(\pi-x\right)-2=0$

ещё раз вспомним, как решать такие уравнения. Применим формулы приведения

$2\sin^2 x-3\cos x-2=0$

приведем к одинаковой функции $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ из значит

$$2\left(1-\cos^2 x\right)-3\cos x-2=0 \qquad 2\cos^2 x+3\cos x=0$$

$$2-2\cos^2 x-3\cos x-2=0 \qquad \cos x\left(2\cos x+3\right)=0$$

отсюда

$\cos x=0$ $\quad$ и $\quad$ $2\cos x+3=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\cos x=-\frac{3}{2}$, как видим это уравнение не имеет решения, т.к. $\left|-\frac{3}{2}\right|>1$, а $\left|\cos x\right|\leq 1$ поэтому ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

Мы рассмотрели решения различных уравнений и видим, что в каждом случае надо творчески подходить к нахождению метода решения, что возможно при хорошем знании формул тригонометрии, алгебраических преобразованиях.

Самостоятельно:

1) $2\sin^2\left(\pi+x\right)+5\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-4=0$ $\qquad$ 2) $\cos^2 x-3\sin x\cdot\cos x+1=0$

3) $\sin 2x\cdot tgx=1$ $\qquad$ 4) $15\sin x+10\cos x=12$ $\qquad$ 5) $\sin\left(50^\circ-x\right)=\cos\left(50^\circ+x\right)$

Урок № 34 (2)

4.9 Решение простейших тригонометрических неравенств.

План.

1) Решение тригонометрических неравенств

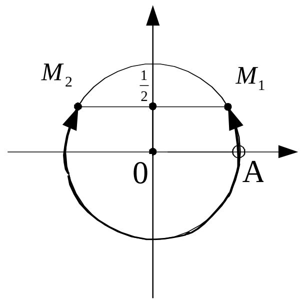
Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$\sin x < m \quad \cos x < m \quad tgx < m \quad ctgx < m$

$\sin x > m \quad \cos x > m \quad tgx > m \quad ctgx > m$

где m – данное число

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство. Рассмотрим на примерах



1) $\sin x < \frac{1}{2}$, т.к. $|\sin x| \le 1$, то данное неравенство можно записать

$-1 \le \sin x \le \frac{1}{2}$

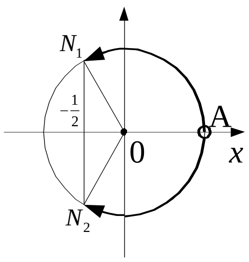
$\cup AM_1 = \frac{\pi}{6}$

$\cup AM_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$

и значит неравенству $\sin x < \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$. Т.к. функция $\sin\alpha$ имеет период 2π, то решение этого неравенства будет промежуток $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \le x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

2) $\cos x > -\frac{1}{2}$

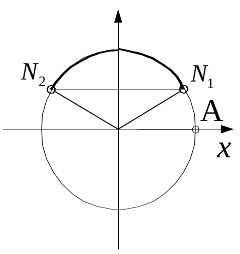
Перепишем неравенство в силу того, что $|\cos x| \le 1$



$-\frac{1}{2} < \cos x \le 1$

неравенству $\cos x > -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{2}{3}\pi < x \le \frac{2}{3}\pi$.

Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$.



3) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, аналогично для $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет

$\frac{\pi}{4} < x < \pi - \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$

4) $tgx > \sqrt{3}$, т.е. можно записать $\sqrt{3} < tgx < \infty$, т.к. функция tg неограниченная. Это неравенство выполняется при $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$; период функции тангенса равен π, значит

$\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

Самостоятельно:

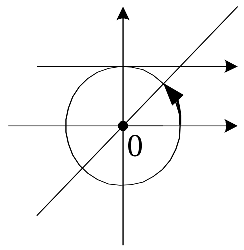
5) $ctgx > 1$

$1 < ctgx < \infty$ этому неравенству удовлетворяют значения x из промежутка

$0 < x < \frac{\pi}{4}$

$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Общее решение: $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$



Раздел V. Производная и ее приложения.

Урок № 36 Тема 5.1. Приращение функции.

План.

1.Приращение аргумента и приращение функции.

2. Решение упражнений.

Пусть задана функция $y = f(x)$. При x = x_0 она принимает значение $y_0 = f(x_0)$.

x_0 - на оси ОХ в точке А, y_0 – на оси ОУ в точке N. Дадим x приращение Δx = AB, получим новое приращенное значение аргумента (в точке В) x = x_0 + Δx

Вычислим приращенное значение функции $y = f(x_0 + \Delta x)$ на оси ОУ – точка М, т.е. длина отрезка ВЕ.

Естественно, что отрезок DE и будет являться *приращением функции в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx.*

Т.е. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Итак, приращение функции есть разность между приращенным значением функции и первоначальным (отрезок DE).

Обратите внимание, что для возрастающей функции DE > 0, а для убывающей функции АС будет больше DE, поэтому разность DE – AC < 0 и $\Delta f(x_0) < 0$.

Сделайте самостоятельно схематический чертеж убывающей функции и укажите $\Delta f(x_0)$.

Вычислим приращение функции $f(x) = x^2 + 2x + 5$ при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$ $x_0 + \Delta x = 2{,}1$

По формуле $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ = (будем иметь) = $f(2{,}1) - f(2)$ =

$2{,}1^2 + 2 \cdot 2{,}1 + 5 - (2^2 + 2 \cdot 2 + 5)$ = (применяем микрокалькулятор) = 0,61

Поставим задачу отыскать приращение функции не в конкретной точке x_0, а в произвольной x, т.е. выведем формулу приращения в общем виде:

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - x^2 - 2x - 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x\,\Delta x + 5 - x^2 - 2x - 5 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\,\Delta x = 2x\,\Delta x + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ – это и есть приращение функции в общем виде: $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$. Подставим x = 2, Δx = 0,1 получим Δf(x) = 0,61 – все верно.

Урок № 37. 5.2. Предел функции в точке. Основные свойства предела функции.
План.

1. **Предел функции в точке.**
2. **Основные свойства предела функции.**

Самым фундаментальным понятием математического анализа является понятие предела функции. Так случилось в математическом познании человечеством природы, что основные понятия математического анализа – производная, интеграл, ряд и др. – были открыты в XXVII веке, а вот строгое обоснование этих понятий спустя 150 лет на основе понятия предела. Это понятие будет сопровождать Вас на протяжении всего Вашего математического образования, поэтому очень важно с первого занятия освоить это понятие.

Различают – предел функции в точке и предел функции на бесконечности. Сначала рассмотрим предел функции в точке, т.е. при $x \to a$.

С одной стороны это понятие может оказаться простым и очевидным.
Пусть дана функция f(x) = x^2 + x и известно, что $x \to 2$, т.е. принимает значения достаточные близкие к 2. Очевидно, что f(x) будет принимать значения близкие к 6, т.е. f(2). При этом пишут $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x)=6$, или в общем виде: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. И читают: предел функции f(x) при в точке a (или при x стремящемся к a) равен b. (Никогда не говорите «лим» или «лимит»)

Но не все так просто! Рассмотрим функцию: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$. Очевидно, что эта функция существует при всех действительных x, кроме x = 1 – обратите на это особое внимание!
Пусть теперь $x \to 1$ слева или справа. Составим таблицу значений.

X	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
f(x)	4,9	4,99	4,999	4,9999	4,99999	4,999999

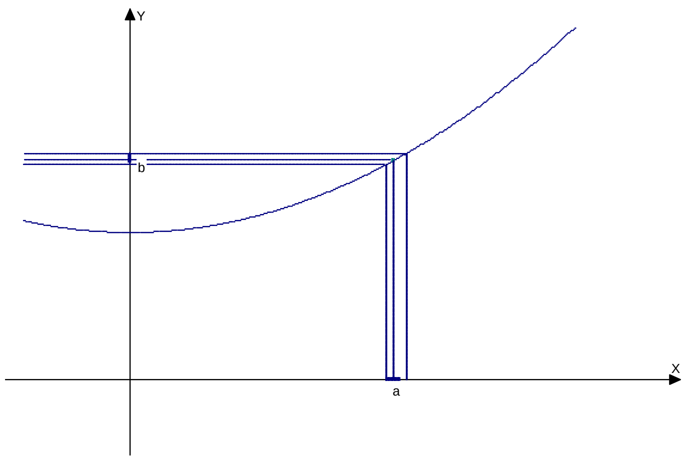
Очевидно, что f(x) стремится к 5. А если x будет стремиться к 1 справа?

X	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
f(x)	5,1	5,01	5,001	5,0001	5,00001	5,000001

Как видим, и в этом случае $f(x) \to 5$. Вот так, а f(1) не существует!
Дадим строгое определение предела функции в точке, это определение одно из нескольких и называют определением «на языке ε – δ» или определением по Коши.

Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a, кроме, быть может, в самой этой точке.

Число b называется пределом этой функции в точке x = a (или при $x \to a$), если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b| < \varepsilon$.



После выделенного «что» можно говорить иначе, например, так: для всех x, принадлежащих интервалу $(a-\delta; a+\delta)$, соответствующие значения функции будут принадлежать интервалу $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$.

В приведенном выше примере a = 1, b = 5. Из таблиц очевидно, как только x будет отличаться от 1 меньше, например, чем на 0,01, то f(x) отличается от 5 также меньше, чем на 0,01. В этом сущность данного определения.

Сформулируем некоторые свойства пределов.

1) $\lim kf(x) = k \lim f(x)$, что означает: постоянный множитель можно выносить за знак предела.

2) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$. Сформулируйте это свойство самостоятельно.

Вообще говоря, это свойство можно распространить на алгебраическую сумму конечного числа функций.

3) $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$. Сформулируйте самостоятельно.

4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)},$ *если* $\lim g(x) \neq 0$. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

5) $\lim\limits_{x \to a} P_n(x) = P_n(a)$, это означает, что предел многочлена при $x \to a$ равен значению многочлена в точке x = a.

6) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)},$ *если* $\lim\limits_{x \to a} Q_m(x) \neq 0$. Т.е. предел дробно-рациональной функции равен значению этой функции, если предел знаменателя отличен от нуля.

Умение находить пределы функций – необходимое условие для дальнейшего успешного изучения математического анализа. Это умение базируется на свойствах пределов (повторите их) и умений в преобразовании алгебраических выражений.

Рассмотрим теперь методику вычисления пределов в точке. Упрощенно, на первых шагах техники освоения пределов, будем считать, что если функция существует в точке x=a, то ее предел равен f(a). Так,

$$\lim_{x \to 3}(2x+5) = 11; \quad \lim_{x \to -2}(x^2+2x-3) = -3; \quad \lim_{x \to 1}(2x^3+5x-1) = 6;$$

$$\lim_{x \to 3}\frac{3x}{2x-1} = 1{,}8; \quad \lim_{x \to 1}\ln\frac{2x+1}{x+3} = \ln\frac{3}{4}; \quad \lim_{x \to 2} e^{2x} = e^4$$ И т.д.

Рассмотрим наиболее популярный вид – пределы дробно-рациональных функций. Итак, если знаменатель такой функции отличен от нуля, то функция существует в точке, то ее предел равен ее значению в этой точке. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+1} = 3{,}5; \quad \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{4x+5}{x^2+1} = 5$

Если же функция в точке x = a не существует, *в знаменателе дроби ноль,* то вычисляем значение числителя в этой точке. При этом, если числитель отличен от нуля, то предел не существует: $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{2x}{x-3} = \infty; \quad \lim\limits_{x \to 1}\dfrac{5x+1}{x^2-1} = \infty; \quad \lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^3}{x^3-x^2-4} = \infty$

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при x = a, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель (x – a), на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}=$(выяснили, что при x = 1 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, уже зная один из сомножителей (x – 1), второй сомножитель для квадратного трехчлена нетрудно подобрать устно, не используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители) =

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x-3}=\frac{6}{-2}=-3.$$

Такова методика, которую необходимо четко усвоить. Еще примеры.

15 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{3x^2+2x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{3x-1}=\dfrac{1}{-4}$

16 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-7}{x+5}=\dfrac{-5}{7}=-\dfrac{5}{7}$

Активно используйте формулы сокращенного умножения:

32. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

17 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+9x-2}{3x^2+5x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(5x-1)}{(x+2)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x-1}{3x-1}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3x-2}{2x^2-11x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(x-\frac{1}{2})(x+2)}{2(x-\frac{1}{2})(x-5)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-5)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-5}=\frac{2{,}5}{-4{,}5}=-\frac{5}{9}$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$ 20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}$ 21 $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-6t+8}{t^2+t-6}$

22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 23 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 24 $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

Урок № 38. 5.2. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций.

На прошлом занятии мы рассматривали функцию $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$. Очевидно, что эта функция существует при всех действительных x, кроме x = 1. Если исключить это значение и сократить дробь на x – 1, то получим простую функцию y = x + 1. Геометрически – это прямая, но без одной точки с координатами (1;5).

<u>Определение</u>. Функция y = f (x) называется непрерывной в точке x = a, если функция в этой точке существует, существует ее предел в этой точке и они равны, т.е.: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

<u>Определение</u>. Если функция непрерывна в каждой точке отрезка [a;b], то она называется непрерывной на этом отрезке.

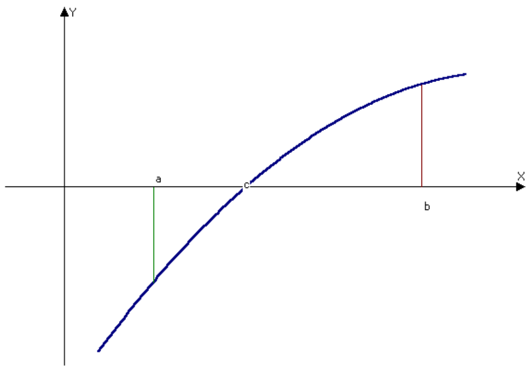
Без доказательства приведем некоторые свойства непрерывных на отрезке функций.

1)Сумма (произведение) конечного числа непрерывных на отрезке функций есть функция непрерывная на этом отрезке.

2)Многочлен есть функция непрерывная на R.
3)Дробно-рациональная функция непрерывна в области определения.
4)Если функция непрерывна на отрезке [a;b] и на концах его принимает значения разных знаков, то на интервале (a;b) найдется хотя бы одна точка x = c, такая, что f(c) = 0. Это очень важное свойство непрерывных функций широко применяется в вычислительной математике! Запомните его. Оно позволяет находить отрезок, содержащий действительный корень уравнения.
В предыдущем абзаце использовалась функция sgn, или sgnum. Это удивительная функция широко применяется в программировании, которое Вам предстоит изучать в будущем. Она принимает только три значения и по-простому называется знак числа:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,\text{если } x>0\\ -1,\text{ если } x<0\\ 0,\text{ если } x=0\end{cases}$$

Запомните ее!)
Дадим геометрическую интерпретацию последнего свойства.



В заключение настоящего занятия закрепим технику вычисления пределов функций и последовательностей, рассматривая более сложные упражнения.

В теории пределов рассматривается несколько видов неопределенностей. Один из них $\infty-\infty$. Действительно, говоря нематематическим языком: «очень много вычесть очень много не означает, что получится ноль». Рассмотрим неопределенность вида $\infty-\infty$ на простом примере.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})$ = (перейдем к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для чего помножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное выражение, а именно $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}$ =

(применяя формулы сокращенного умножения, будем иметь) =

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим еще пример раскрытия неопределенностей вида ∞ - ∞ в точке.

P = $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; Очевидно, что пределы и уменьшаемого и вычитаемого не существуют в точке x = 1, значит имеем неопределенность вида ∞ - ∞. Разложим знаменатель второй дроби на множители и приведем к общему знаменателю, таким образом перешли от неопределенности вида ∞ - ∞ к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Сократим дробь и, говорят, «избавимся» от неопределенности. P =

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

По аналогии выполните задания:

1. $\lim_{x\to-3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{6}{9-x^2}\right)$; 2. $\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; 3. $\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

Вычислите пределы аналогичного вида, но на бесконечности.

4. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{x^2+1}\right)$; 5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)$; 6. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+3}-x\right)$

7. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+3x+17})$; 8. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+8x+11}-\sqrt{9x^2+6x+7})$

Рассмотрим вычисление пределов в точке функций, которые не являются дробно – рациональными. Например, таких: P = $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. Легко проверить, что это неопределенность вида $\frac{0}{0}$: и в знаменателе и в числителе нули при x = 3. Методика вычисления таких пределов следующая: помножают числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное в данном случае числителю, т.е. на $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1}$. Знаменатель, естественно, необходимо разложить на множители. Будем иметь.

P = $\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1})(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (используем формулы сокращенного умножения) = $\lim_{x\to3}\frac{3x-5-x-1}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ =

$$\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}=$$

= $\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (сокращаем на x – 3 и убеждаемся, что неопределенности уже нет) = $\lim_{x\to3}\frac{2}{(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (проводим вычисления) =

= $\frac{2}{(3+3)(\sqrt{3*3-5}+\sqrt{3+1})}=\frac{2}{6(2+2)}=\frac{1}{12}$. Такова методика. Если разность радикалов в знаменателе, то помножают на выражение, сопряженное знаменателю, например.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x3+7}}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{x3+7})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x3+7})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x3+7})}=$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{x+5-3x-7} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{-2x-2} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{-2} = \frac{(-1+4)(\sqrt{-1+5}+\sqrt{-1*3+7})}{-2} = \frac{3(2+2)}{-2} = -6$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; 10. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$; .11. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$; 12. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

Урок №39. 5.3. Теоремы о пределах. Предел функции на бесконечности. Два замечательных предела.

План.

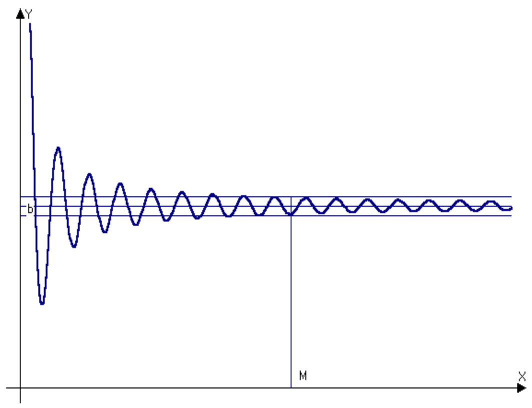
1.Теоремы о пределах.

2.Предел функции на бесконечности.

3.Два замечательных предела.

Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x (при $x\to\infty$).

Число b называется пределом этой функции при $x\to\infty$, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое значение аргумента x = M, что для всех x > M соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b|<\varepsilon$. (или соотв. значения функции будут принадлежать интервалу $(b-\varepsilon;b+\varepsilon)$)



Рассмотрите рисунок и убедитесь, что для всех x > M соответствующие значения функции будут отличаться от b меньше, чем на ε. В этом случае говорят и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Различают предел функции на плюс бесконечности и на минус бесконечности, во втором случае пишут $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Умение находить пределы функций – необходимое условие для дальнейшего успешного изучения математического анализа. Это умение базируется на свойствах пределов (повторите их) и умений в преобразовании алгебраических выражений.

Рассмотрим вычисление пределов функций на бесконечности. Абсолютно так же вычисляются пределы числовых последовательностей.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2x^2+5x}=0$ очевидно, в силу (*) 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)=\infty$ Пишут знак бесконечности, а говорят «предел не существует». Итак, для закрепления: если переменная *только* в знаменателе, то предел равен нулю, если переменная только в числителе, то предел не существует. Убедитесь, что

Как быть, если переменная, которая стремится к бесконечности, и в числителе и в знаменателе, т.е. и числитель и знаменатель стремятся к бесконечности? В этом случае говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$, а сам процесс вычисления пределов называют словосочетанием «*раскрытие неопределенностей*».

Процесс раскрытия таких неопределенностей рассмотрим на конкретных примерах. Пусть необходимо вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+5x}$. Отыскивают старшую степень переменной (в данном случае она, очевидно, вторая) и *делят каждое слагаемое числителя и знаменателя на эту старшую степень переменной,* проводя в уме сокращения.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{x}}$ = (применяя «ключ» и теоремы о пределах, далее имеем) = $\dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$. Заметим, что если под знаком предела содержится переменная, то сам знак предела *записывать обязательно*, в противном случае – нет.

Рассмотрим еще примеры.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-7x+15}{2x^3+5x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{15}{x^3}}{2+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}} = \dfrac{4+0-0+0}{2+0+0}$ = 2. Легко видеть, что *если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.* Поэтому ответ можно писать сразу, не проводя деления:

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+13x^4+8x^3+x^2+3}{2x^6+4x^3+5x}$ = 2,5 А если степени не равны? Если степень знаменателя выше степени числителя, то в пределе все слагаемые числителя будут равны нулю. В самом деле: 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+11x^2+x+5}{2x^4+3x^2+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{11}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}}{2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}} = \dfrac{0+0+0+0}{2+0+0}$ = 0. Итак, *если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю*.

Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует:

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+2x^2+3x+2}{2x^4+7x^2+1} = \dfrac{1+0+0+0}{0+0+0} = \infty$.

Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности.

8. $f(x)=\dfrac{x^2+4x\ +2}{5x^2+3x\ +1}$ 9. $h(x)=\dfrac{3x}{x^2+x\ +7}$ 10. $g(x)=\dfrac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x\ +3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})$ = (перейдем к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для чего помножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное выражение, а именно $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

=(применяя формулы сокращенного умножения, будем иметь) $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+2-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{3}{2}.$$

Число e – иррациональное – бесконечная непериодическая дробь:
e ≈ 2,718281828459045235360289471352266…

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ второй замечательный предел.

Рассмотрим примеры вычисления пределов с использованием этого ключа.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^{2x}$ = P. Для вычисления указанного предела необходимо в показателе степени иметь $\dfrac{x}{3}$. Делается это просто и формально, внимательно разберитесь:

P = $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}$ = (ничего не изменив, формально записали в показателе $\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{3}{x}=1$, но предел $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^{\frac{x}{3}}=$ e), это означает, что P = $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{3}{x}\cdot 2x}=e^6$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{2x})^{5x}$ = P (Формируем показатель, не забывая о знаке) P = $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{2x})^{-2x\cdot\frac{-1}{2x}\cdot 5x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-5x}{2x}}$ = $e^{\frac{-5}{2}}$.

Решение примеров.

Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3$ [неопределенность 1^∞]

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^x=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\frac{x}{4}}\right)^{-\frac{x}{4}}\right]^{-4}=e^{-4}$ [неопределенность 1^∞]

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{2x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{x}\right]^2=$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{\frac{x+1-1}{-1}\cdot(-1)}\right)^2=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{1}\right)^{-2}=$$

$=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\right)^{-2}\cdot 1=e^{-2}$ [неопределенность 1^∞]

Урок № 40. 5.4. Производная, ее геометрический и физический смысл.
План.

1. **Задача, приводящая к понятию производной**
2. **Определение производной.**

Задача, приводящая к понятию производной

Пусть тело движется прямолинейно по закону $S = f(t)$
От точки M_0 до точки М за время t оно пройдет путь $S = f(t)$, за время Δt от точки М до точки M_1 он пройдет путь ΔS, где Δt – приращение времени, ΔS – приращение пути.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, оно дает среднюю скорость движения тела за время Δt
$$V_{ñð} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
Средняя скорость не может во всех точках пути точно характеризовать быстроту перемещения тела, в частности в момент времени t. Для того, чтобы выразить эту истинную скорость с помощью средней скорости надо взять меньшим промежуток времени Δt. Наиболее точно характеризует скорость движения тела в момент времени t так предел, к которому стремится средняя скорость при Δt→0. Этот предел называют скоростью движения тела в данный момент времени t, т.е.
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)}{\Delta t}$$
Определение. Скорость движения тела в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути ΔS к приращению времени Δt, когда Δt→0.

Определение производной.
Пусть мы имеем функцию $ó = f(x)$, определенную в некотором промежутке.
Пусть аргумент X получил приращение Δx, тогда функция получит приращение
$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$
Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Найдем предел этого отношения при Δx→0.
Если этот предел существует, то его называют **производной данной функции** и обозначают
$$f^{/}(x), \quad y^{/}, \quad \frac{\alpha y}{\alpha x}$$
т.о. по определению
$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Определение. Производной данной функции $ó = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда Δx стремиться к нулю.
Наряду с обозначением $f^{/}(x)$для производной употребляют и другие обозначения.
$$y^{/}, \quad y^{/}x$$
Конкретное значение производной при x=α, обозначается $f^{/}(\alpha)$

(Пример: Дана функция $y = x^2$)

Последовательность нахождения производной функции

1. Найти наращенное значение функции $f(x+\Delta x)$.
2. Найти приращение функции $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$

3. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4. Найти производную функции, как предел этого отношения при Δx→0, т.е. $y^{/} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Найти производную функции y=x²

1. $f(x + \Delta \tilde{o}) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x + \Delta x$

4. $y^{/} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \qquad (x^2)^{/} = 2x$

Найти $f^{/}(x)$ **если f(x)=x; f(x)=c, f(x)=x³**

Вернемся к движению тела S=f(t)

Следовательно $V = S^{/}(\Delta) = S^{/}(t)$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Определение. Скорость движения тела в данный момент времени t, есть производная пути по времени.

Таков физический смысл производной функции.

Домашнее задание.
Найти производные функций

1) $y = 2x^2 + x \qquad (4x + 1)$

2) $f(x) = x^3 - x \qquad (3x^2 - 1)$

3) $f(x) = 4x \qquad (4)$