КМҚК «Геологиялық барлау колледжі» ШҚО ББ ә

0702000– «ПҚК барлаудың технологиясы мен техникасы»
0701000– « Геологиялық суретке түсіру, ПҚК іздеу мен барлау»
0703000– «ПҚК іздеу мен барлаудың геофизикалық әдістері»
0704000– «Гидрогеология және инженерлік геология»
0801000- «Мұнай мен газ ұңғымаларын бұрғылау және бұрғылау жұмыстарының технологиясы»

мамандықтарына арналған

«Математика»

пәні бойынша базалық тірек конспектілер жинағы

Дайындаған: Қуттыгожина.А.С.

Семей геологиялық барлау колледжінің
Жалпытехникалық пән бірлестігімен келісілген
Хаттама №____ «____» _____ __________2018ж.
ПБ жетекшісі________________ Беспалова С.В.

Семей қаласы
2018 – 2019 оқу жылы.

Базалық тірек конспектісі 2018 жылы бекітілген оқу жоспарымен 2018 жылы бекітілген оқу жұмыс бағдарламасына сәйкес құрастырылған.
Оқу бөлімімен қолданысқа ұсынылды.

Директордың оқу ісі жөніндегі орынбасары _______________Минаева Н.Т.

Пәнге берілетің жалпы сағаты 188
Соның ішінде
I семестрде_______________100______________________
II семестрде ______________88______________________

Міндетті бақылау жұмыстарының саны
_1 ___ I __ семестрде
_2 ___ II __ семестрде

Қорытынды бақылау ______емтихан____________

Мазмұны

Пәннің тақырыптық жоспары

№ р/с	Бөлімдер мен тақырыптар	Күндізгі оқу түрі негізінде оқу сағатының көлемі		
		Қойылған деңгей	Жоғары деңгей	Орта буын маманы
1	2	3	4	5
	Бөлім I Теңдеулер мен теңсіздіктер, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйелері	**-**	**12**	**12**
1	Тақырып 1.1 Теңдеулер. Теңдеудің түбірі. Теңқуатты теңдеулер Теңдеулер қасиеттері. Сызықтық теңдеулер, квадраттық теңдеулер және оларға келтірілетіндер. Бөлшек – рационал теңдеулер. Бақылау жұмысы	-	4	4
2	Тақырып 1.2 Теңсіздіктер, олардың қасиеттері. Теңдеулер мен теңсіздіктер жүйелері. Оларды шешу әдістері. Геометриялық интерпретациясы	-	4	4
3	Тақырып 1.3 II және III ретті анықтауыштар. Крамер формуласы бойынша екі, үш айнымалысы бар сызықтық теңдеулер жүйесін шешу	-	4	4
	Бөлім II Функциялар, олардың қасиеттері мен графиктері	**-**	**8**	**8**
4	Тақырып 2.1 Сандық функция. Функцияның берілу тәсілдері. Функции графигі	-	2	2
5	Тақырып 2.2 Функция графиктерін қарапайым түрлендіру	-	2	2
6	Тақырып 2.3 Кері функция. Функция қасиеттері: монотондылық, жұптылық, тақтылық, периодтылық. Бақылау жұмысы	-	4	4
	Бөлім III Көрсеткіштік, логарифмдік және дәрежелік функциялар.	**-**	**22**	**22**
7	Тақырып 3.1 Рационал көрсеткішті дәреже және оның қасиеттері	-	2	2
8	Тақырып 3.2 Дәрежелік функция, оның қасиеттері мен графигі	-	2	2
9	Тақырып 3.3 Көрсеткіштік функция, оның графигі мен қасиеттері	-	2	2
10	Тақырыбы 3.4 Қарапайым көрсеткіштік теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу.	-	4	4
11	Тақырып 3.5 Логарифмдер. Ондық және натурал логарифмдер	-	2	2
12	Тақырып 3.6 Логарифмдік функция, оның қасиеттері мен графигі	-	2	2
13	Тақырып 3.7 Логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу	-	4	4
14	Тақырып 3.8 Есептер шығару Бақылау жұмысы	-	4	4
	Бөлім IV Тригонометриялық функциялар	**-**	**26**	**26**
15	Тақырып 4.1 Сан аргументті тригонометриялық функциялар . Тригонометриялық өрнектердің мәндерін есептеу	-	4	4
16	Тақырып 4.2 Бір аргументті тригонометриялық	-	2	2

	функциялардың қосындысы мен айырмасы. Тригонометриялық өрнектерді теңбе- тең түрлендіру			
17	Тақырып 4.3 Тригонометриялық функциялардың қасиеттері мен графиктері	-	2	2
18	Тақырып 4.4 Кері тригонометриялық функциялар	-	4	4
19	Тақырып 4.5 Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу	-	2	2
20	Тақырып 4.6 Бір функцияға келтірілетін теңдеулерді шешу	-	2	2
21	Тақырып 4.7 Біртектес тригонометриялық теңдеулерді шешу	-	4	4
22	Тақырып 4.8 Әр түрлі типтегі тригонометриялық теңдеулерді шешу	-	2	2
23	Тақырып 4.9 Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешу	-	2	2
24	Тақырып 4.10 Есептер шығару Бақылау жұмысы	-	2	2
	Бөлім V Туынды және оның қосымшасы	**-**	**40**	**40**
25	Тақырып 5.1. Функция өсімшесі	-	2	2
26	Тақырып 5.2 Функцияның нүктедегі шегі. Шектің негізгі қасиеттері. Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. Үзіліссіз функциялардың қасиеттері	-	2	2
27	Тақырып 5.3. Шектер туралы теоремалар. Функцияның шексіздіктегі шегі. Екі тамаша шек	-	2	2
28	Тақырып 5.4 Туынды, оның геометриялық және физикалық мағынасы	-	2	2
29	Тақырып 5.5 Натурал көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысы. Синус, косинус функцияларының туындысы.	-	2	2
30	Тақырып 5.6 Қосынды, айырма, көбейтінді және бөліндінің туындысы	-	2	2
31	Тақырып 5.7 Күрделі функцияны дифференциалдау	-	2	2
32	Тақырып 5.8 Көрсеткіштік және дәрежелік функциялардың туындысын есептеу	-	2	2
33	Тақырып 5.9 Логарифмдік функция туындысы	-	2	2
34	Тақырып 5.10 Кері тригонометриялық функциялар туындысы. Бақылау жұмысы	-	4	4
35	Тақырып 5.11 II ретті туынды және оның физикалық мағынасы	-	2	2
36	Тақырып 5.12 Функцияның өсу, кему белгілері	-	2	2
37	Тақырып 5.13 Функция экстремумы.Функцияның экстремумға I және II ретті туынды арқылы зерттеу	-	2	2
38	Тақырып 5.14 Функция графигінің дөңес, ойыстығы. Иілу нүктесі	-	2	2
39	Тақырып 5.15 Графиктерді сызуда туындыны қолдану. Бақылау жұмысы.	-	2	2
40	Тақырып 5.16 Функцияның аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндері. Функцияның минимумы мен максимумына арналған есептер	-	2	2
41	Тақырып 5.17 Функция дифференциалы және оның	-	2	2

	геометриялық мағынасы. Дифференциалды жуық есептеулерде қолдану			
42	Тақырып 5.18 Есетер шығару	-	2	2
	Бөлім VI Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар		**18**	**18**
43	Тақырып 6.1 Стереометрия аксиомалары және олардың салдарлары		2	2
44	Тақырып 6.2 Түзулердің кеңістікте өзара орналасуы. Түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі	**-**	**2**	**2**
45	Тақырып 6.3 Жазықтықтардың параллельдігі	-	2	2
46	Тақырып 6.4 Параллель проекция және оның қасиеттері	-	2	2
47	Тақырып 6.5 Түзу мен жазықтық перпендикулярлығы	-	2	2
48	Тақырып 6.6 Перпендикуляр және көлбеу. Жазықтық пен түзу арасындағы бұрыш. Үш перпендикуляр туралы теорема	-	2	2
49	Тақырып 6.7 Екі жақты бұрыш. Жазықтықтар арасындағы бұрыш. Екі жазықтықтың перпендикулярлығы	-	4	4
50	Тақырып 6.8 Есептер шығару Бақылау жұмысы	-	2	2
	Бөлім VII Векторлар және координаттар	**-**	**8**	**8**
51	Тақырып 7.1 Кеңістіктегі векторлар. Векторларға амалдар қолдану	-	2	2
52	Тақырып 7.2 Жазықтық пен кеңістіктегі тік бұрышты координаталар	-	2	2
53	Тақырып 7.3 Түзу теңдеулері Бақылау жұмысы	-	2	2
54	Тақырып 7.4 Есеп шығару	-	2	2
	Бөлім VIII Интеграл және оның қосымшасы	-	**12**	**12**
55	Тақырып 8.1 Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері	-	4	4
56	Тақырып 8.2 Анықталған интеграл және оның геометриялық мағынасы	-	2	2
57	Тақырып 8.3 Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері мен оны есептеу. Бақылау жұмысы	-	2	2
58	Тақырып 8.4 Анықталған интегралды есептеу.	-	2	2
59	Тақырып 8.5 Анықталған интеграл арқылы фигуралар аудандарын есептеу. Бақылау жұмысы	-	2	2
	Бөлім XI Геометриялық денелер мен олардың беттері	**-**	**18**	**18**
60	Тақырып 9.1 Көпжақтар. Призма. Бүйір беті мен толық бетінің аудандары	-	2	2
61	Тақырып 9.2 Параллелепипед, оның түрлері мен қасиеттері	-	2	2
62	Тақырып 9.3 Пирамида. Пирамиданың параллель қималарының қасиеттері	-	2	2
63	Тақырып 9.4 Қиық пирамида. Бүйір беті мен толық бетінің ауданы	-	4	4
64	Тақырып 9.5 Цилиндр.Конус	-	2	2

65	Тема 9.6 Цилиндр конус және қиық конустың осьтік қималары	-	2	2
66	Тақырып 9.7 Шар. Шар бетінің ауданы	-	4	4
	Бөлім X Геометриялық денелердің көлемдері	**-**	**16**	**16**
67	Тақырып 10.1 Призма көлемі	-	2	2
68	Тақырып 10.2 Пирамида, қиық пирамида көлемі	-	2	2
69	Тақырып 10.3 Цилиндр көлемі	-	2	2
70	Тақырып 10.4 Конус көлемі	-	2	2
71	Тақырып 10.5 Қиық конус көлемі	-	2	2
72	Тақырып 10.6 Шар және оның бөліктерінің көлемдері.	-	2	2
73	Тақырып 10.6 Геометриялық денелердің көлемдерін табуға есептер шығару.	-	2	2
74	Бақылау жұмысы.		2	2
	Бөлім IX. Ықтималдық теориясы мен математикалық статистика элементтері.		**8**	**8**
75	Тақырып 11.1. Математикалық статистика элементтері.		2	2
76	Тақырып 11.2 Кездейсоқ оқиғаларға қолданалатын амалдар.		2	2
77	Тақырып 11.3 Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы.		2	2
78	Тақырып 11.4 Вариативтік қатар.		2	2
Пән бойынша барлығы		-	**188**	**188**

Бөлім Теңдеулер, теңсіздіктер. Сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесі.

Сабақ №1. Теңдеулер және олардың қасиеттері. Сызықтық теңдеулер, квадраттық теңдеулер және бөлшек рационал теңдеулер

Жоспары:

1. **Кіріспе**
2. **Теңдеу туралы түсінік, оның негізгі ұғымдары**
3. **Теңдеудің түрлері мен оларды шешу**

Математика тараулары:

I. Теңдеулер және теңсіздіктер. Олардың жүйелері.
II. Функциялар, олардың қасиеттері және графиктері.
III. Көрсеткіштік, логарифмдік және дәрежелік функциялар.
IV. Тригонометриялық функциялар.
V. Туынды және оның қосымшасы.
VI. Кеңістіктегі түзулер және жазықтықтар.
VII. Векторлар және координаталар.
VIII.Интеграл және оның қосымшасы.
IX. Кеңістіктегі денелер және олардың беттері.
X. Денелердің көлемдері.

Математика дегеніміз грек тілінен аударғанда есеп туралы ғылым. Біздің заманда математикасыз ешбір сала жұмыс істемейді. Жалпы математианың қолданысы сендердің келешек мамандықтарында өте кең. Лабораториядағы анализдер мен тәжірибелердің барлығы математиканы қолданумен өткізіледі. Енді математиканың негізгі мақсаттарына тоқтала кетейік:

1. Адамның ойлау қабілетін, логикасын дамыту.
2. Кеңістікте елестете білу, түрлі есептеулер жүргізе білу қабілеттерін дамыту.
3. Күнделікті өмірді жайлы, ыңғайлы, қолайлы ету.
4. Мамандығы бойынша есптеулер жүргізе білуге үйрену.

Сонымен математиканың мақсаттары бойынша жұмысымызды бүгіннен бастайық.

Теңдеуді шешу дегеніміз – оның түбірлерінің жиынын табу немесе олардың болмайтынын дәлелдеу. Оны теңдеудің шешімі деп атайды.

Екі теңдеу теңқуатты деп аталады, егер де бір теңдеудің шешімі екіншінің де шешімі болса және керісінше.

$x=0$ и $x\left(x^2+3\right)=0$ теңдеулері теңқуатты, себебі бұлардың бір ғана түбірі бар $x=0$.

$x^2-x=0$ және $\frac{x^2+2}{x}=\frac{x+1}{x}$ – теңдеулері теңқуатты емес, себебі $x=0$ бірінші етңдеудің түбірі болады, бірақ екінші теңдеудің шарттарын қанағаттандырмайды.

$2x-10=0$ и $(2x-10)(x+1)=0$ теңдеулері теңқуатты болмайды, себебі біріншінің түбірі $x=5$, ал екінші теңдеудің бұдан басқа $x=-1$ түбірі бар.

Теңдеулердің негізгі түрлері: а) сызықтық теңдеулер, ә) квадраттық теңдеулер, б) бөлшек-рационал теңдеулер.

Теңдеудің түбірі дегеніміз теңдіктің екі жағын да теңестіретін х айнымалысының мәні.

а) сызықтық теңдеулердің жалпы түрі:

$ax=b$, а≠0.

Оның түбірі: $\tilde{o}=\frac{b}{a}$

ә) квадраттық теңдеудің жалпы түрі: $ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

Егер b- жұп болса, $x_{1/2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}, k=\frac{b}{2}$

Виет теоремасы:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

б) Бөлшек- рационал теңдеулердің жалпы түрі: $\frac{x-a}{x-b} = 0,\ x \neq b$

Оның түбірі: $x = a$

1 мысал. $4x = 29$

Түбірі: $x = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4}$.

2 мысал. $3x^2 - 5x - 8 = 0$

$$D = `(-5)^2 - 4 \cdot (-8) \cdot 3 = 25 + 96 = 121$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3},\ x_1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}, x_2 = -1$$

Жауабы: $x_1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}, x_2 = -1$

3 мысал. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

Бұл биквадрат теңдеу. Оны шешу үшін айнымалыны ауыстыру қажет.

$$x^2 = y$$

$$y^2 - 25y + 144 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$$

$$y_1 = 16, y_2 = 9$$

$$x_{1/2} = \pm 4, x_{3/4} = \pm 3$$

Жауабы: $x_{1/2} = \pm 4, x_{3/4} = \pm 3$

4 мысал. $\frac{2x+3}{x-3} = 0$

$$x \neq 3$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Жауабы: $x = -\frac{3}{2}$

Бақылау сұрақтары:

1. Теңдеу дегеніміз не?
2. Теңдеу түбірі дегеніміз не?
3. Теңдеуді шешу дегеніміз не?
4. Қандай теңдеулер теңқуатты деп аталады?
5. $2x^2$- 10x = 12 теңдеуінің түбірі қайсысы болады:

   1) -1; 2) 1; 3) 6; 4) -6?
6. 1,3 және – 1,3 сандарының әрқайсысы x^2 = 1,69 теңдеуінің түбірі болатынын дәлелдеу керек.
7. 1) 7(x - 3) = 49 и x – 3 = 7; 2) $\frac{2x}{3} = 9$ и 2x = 27; 3) x^2 = 5x – 6 и x^2 -5x + 6 = 0 теңдеулері теңқуатты бола ма?
8. Мына теңдеулерді шеш:

1) 6(x + 4) = 3 – 2x; 2) 3(x + 3) + x = 9 + 4x ; 3) x^2 +3x = 0; 4) x^2 – 14x + 48 =0; 5) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$; 6) x^2 - $\frac{5x}{4}+\frac{3}{8}=0$.

9. Қандай теңдеу квадраттық теңдеу деп аталады?
10. Дискриминант дегеніміз не?
11. Теңдеуді шешпей- ақ дискриминант арқылы оның неше түбірлері бар екенін анықта: а) $3x^2$ -14x + 16 = 0; б) $8x^2$ – 4x +0,5 =0; в) x^2 – 10x + 34 = 0.
12. Түбірлері арқылы теңдеуді құру керек: а) x_1 =3, x_2 =10; б) x_1 = -7, x_2 = -4; в) x_1 =2- $\sqrt{3}$, x_2 = 2 + $\sqrt{3}$.

Сабақ №2.
Есептер шығару.
Жоспар:

1. **Тестік тапсырмалар**
2. **Бақылау жұмысы**

Тест

1. $2x^2$- 10x = 12 теңдеуінің түбірі қайсысы болады:

1) -1;
2) 1;
3) 6;
4) -6?

2. 1,3 және – 1,3 сандарының әрқайсысы x^2 = 1,69 теңдеуінің түбірі болатынын дәлелдеу керек.
3. 1) 7(x - 3) = 49 и x – 3 = 7;
2) $\frac{2x}{3}=9$ и 2x = 27;
3) x^2 = 5x – 6 и x^2 -5x + 6 = 0 теңдеулері теңқуатты бола ма?
4. Мына теңдеулерді шеш:
1) 6(x + 4) = 3 – 2x;
2) 3(x + 3) + x = 9 + 4x ;
3) x^2 +3x = 0;
4) x^2 – 14x + 48 =0;
5) $\frac{x^2-4}{x}=\frac{3+2x}{2}$;
6) x^2 - $\frac{5x}{4}+\frac{3}{8}=0$.
5. Қандай теңдеу квадраттық теңдеу деп аталады?
6. Дискриминант дегеніміз не?
7. Теңдеуді шешпей- ақ дискриминант арқылы оның неше түбірлері бар екенін анықта: а) $3x^2$ -14x + 16 = 0;
б) $8x^2$ – 4x +0,5 =0;
в) x^2 – 10x + 34 = 0.

8. Түбірлері арқылы теңдеуді құру керек:
а) x_1 =3, x_2 =10;
б) x_1 = -7, x_2 = -4;
в) x_1 =2- $\sqrt{3}$, x_2 = 2 + $\sqrt{3}$.

Бақылау жұмысы

І нұсқа.

1. $$\frac{\left(2{,}3+5\div\frac{25}{4}\right)\cdot 7}{0{,}8\cdot 0{,}125+6{,}9}$$

2. $$\frac{x-3}{3}-1=\frac{x}{2}$$

3. $$\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=40 \end{cases}$$

4. $$\left(a+x\right)^2\cdot\left[-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2\right]$$

II нұсқа

1. $$\frac{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 49}{\left(\frac{135}{24}-\frac{17}{18}\right)\cdot\frac{36}{31}}$$

2. $$\frac{x+8}{6}+2=\frac{x}{3}$$

3. $$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

4. $$\left(a+x\right)^2\cdot\left[-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2\right]$$

Сабақ №3. Теңсіздіктер және олардың қасиеттері. Сызықтық теңдеулер және теңсіздіктер жүйесі. Геометриялық интерпретациясы.

Жоспар:

1. Теңсіздіктің шешімі
2. Теңсіздіктің шешімінің болу-болмау шарттары
3. Теңсіздіктер жүйесін шешу
4. Теңсіздіктер және теңсіздіктер жүйесінің геометриялық интерпретациясы

Теңсіздікті шешу дегеніміз- теңсіздік дұрыс болатындай айнымалының мәндер жиынын табу.

Екі теңсіздік теңқуатты болады, егер де бұл теңсіздіктердің шешімдерінің жиыны сәйкес келсе.

Теңсіздікті шешейік:

1-мысал. $5x-\frac{7x-1}{2}+\frac{2x-5}{5}>\frac{7}{10}$

Барлық мүшелерін сол жаққа шығарып, ортақ бөлімге келтірейік, ол 10- ға тең; бөлімі 0-ге тең болмағандықтан және айнымалысы болмағандықтан оны түсіруге болады.

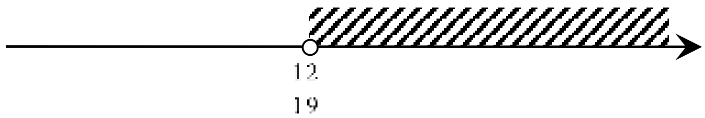
$50x-5(7x-1)+2(2x-5)-7>0$

$50x-35x+5+4x-10-7>0$

$19x-12>0$

$19x>12$

$x>\frac{12}{19}$



$x\in\left(\frac{12}{19};+\infty\right)$

2-мысал. $|5-2x|<3$

яғни $-3<5-2x<3$

Сандық теңсіздіктердің қасиеттерін қолданып

$-3-5<5-2x<3-5$

$-8<-2x<-2$

-2-ге бөлеміз, теңсіздік таңбасы керіге ауысады.

$4>x>1\Leftrightarrow 1<x<4$

Жауабы: $x\in(1;4)$

Немесе теңсіздіктер жүйесі ретінде жазып алуға болады.

$$\begin{cases}5-2x<3\\5-2x>-3\end{cases}\quad\begin{cases}-2x<3-5\\-2x>-3-5\end{cases}\quad\begin{cases}-2x<-2\\-2x>-8\end{cases}\quad\begin{cases}x>1\\x<4\end{cases}$$

Жауабы: $x\in(1;4)$

3-мысал. $5x-2-3x^2>0$

(–1)- ге көбейтейік.

$3x^2-5x+2<0$

Квадраттық теңсіздік

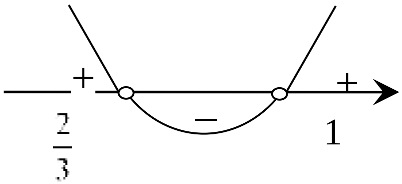
$3x^2-5x+2=0$ теңдеуінің түбірлерін табайық:

$D=25-4\cdot 6=1$

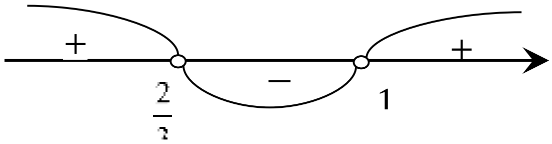
$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{6};\qquad x_1=1;x_2=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$y=3x^2-5x+2$ функциясының графигі парабола болып табылады, тармақтары жоғары қарайды, Ох осімен қиылысу нүктелері $x_1=1;\quad x_2=\dfrac{2}{3}$

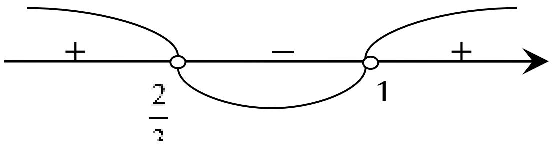
Геометриялық түрде бейнелейік:



немесе



немесе



үшмүшенің таңбасын үш интервалда анықтаймыз. $3x^2-5x+2<0$ теңсіздігін шешу керек болғандықтан, теңсіздікті интервалдар әдісімен шешеміз $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$

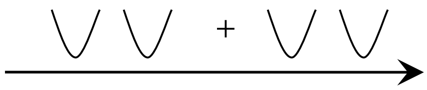
4-мысал.

е) $-2+x-3x^2\le 0$

$3x^2-x+2\ge 0$

$3x^2-x+2=0$

$D=1-4\cdot 6=-23<0$



Нақты түбірлері жоқ, парабола тармақтары жоғары қарағандықтан, ол осьті қимайды және одан жоғары орналасады, сондықтан ылғи да > 0, ал біз $3x^2-x+2\ge 0$ теңсіздігін шешуіміз керек, берілген теңсіздіктің шешімі $x\in(-\infty;+\infty)$.

5-мысал. $\dfrac{5-2x}{3x-1}\ge 2$ – бөлшек–рационал теңсіздік, ол теңсіздіктер жүйесі арқылы немесе интервалдар әдісімен шешіледі. Оң жағын сол жаққа шығарып, ортақ бөлімге келтіреміз.

$\dfrac{5-2x}{3x-1}-2\ge 0$

$\dfrac{5-2x-6x+2}{3x-1}\ge 0$

$\dfrac{-8x+7}{3x-1}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{8x-7}{3x-1}\le 0$

Теңсіздіктер жүйесі арқылы шешіп көрейік. Бөлшек < 0, егер алымы мен бөлімінің таңбалары әр түрлі болса

$a)\begin{cases}8x-7\le 0\\ 3x-1>0\end{cases}$ *или* $б)\begin{cases}8x-7\ge 0\\ 3x-1<0\end{cases}$

(Бөлшек 0- ге тең егер алымы 0- ге тең болса).

Теңсіздіктер жүйесін шешкен кезде әрбір теңсіздікті шешіп, олардың ортақ шешімін табу керек.

$\begin{cases}8x-7\le 0\\ 3x-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}8x\le 7\\ 3x>1\end{cases}$ $\begin{cases}x\le \dfrac{7}{8}\\ x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$\frac{1}{3}<x\le \frac{7}{8}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{8}\right]$

$\begin{cases}8x-7\ge 0\\ 3x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge \dfrac{7}{8}\\ x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Жүйенің шешімі жоқ. Берілген теңсіздіктің шешімі: $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{8}\right]$.

Интервалдар әдісі теңсіздікті тез шешуге мүмкіндік береді $\frac{8x-7}{3x-1}\le 0$ түбірлері: $x=\frac{7}{8}$ және $x=\frac{1}{3}$.

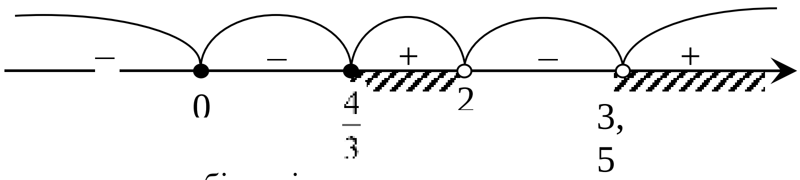
$x\in\left(\frac{1}{3};\frac{7}{8}\right]$

Интервалдар әдісі жоғары дәрежелі теңсіздіктерді шешуге мүмкіндік береді.

$\frac{x^2\cdot(3x-4)\cdot\left(x^2+4\right)}{(2x-7)(x-2)}\ge 0$ көпмүше түбірлерін табайық.

$x^2=0$ $\qquad x_1=0$

$3x-4=0$ $\qquad x_2=\frac{4}{3}$



$x^2+4>0$ әрқашан дұрыс болады, яғни нақты түбірлері жоқ.

$2x-7=0$ $\qquad x=\frac{7}{2}=3,5$

$x-2=0$ $\qquad x=2$

Сан түзуінде түбірлерді белгілеп көрейік. Әрбір аралықта өрнектің таңбасын анықтаймыз.

$(3,5;+\infty)$ $\qquad x=4$ получаем $\qquad \frac{16\cdot 8\cdot 20}{1\cdot 2}>0$

$(2;3,5)$ $\qquad x=3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{9\cdot 5\cdot 13}{(-1)\cdot 1}<0$

$\left[\frac{4}{3};2\right)$ $\qquad x=1,5 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2,25\cdot 0,5\cdot 6,25}{(-4)\cdot(-0,5)}>0$

$\left[0;\frac{4}{3}\right]$ $\qquad x=1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1\cdot(-1)\cdot 5}{(-5)\cdot(-1)}<0$

$(-\infty;0]$ $\qquad x=-1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1\cdot(-7)\cdot 15}{-9\cdot(-3)}<0$

Теңсіздіктің шешімі: $x \in \left[\frac{4}{3};2\right) \cup \left(3,5;+\infty\right)$.

Сабақ №4. Теңсіздіктер және олардың қасиеттері. Сызықтық теңдеулер және теңсіздіктер жүйесі.

Есептер шығарту.

$1)\left|3x-7\right| \le 5$ $\quad 2)\left|2x+5\right| > 3$ $\quad 3)-x^2+7x-10<0$

$4)\begin{cases} \frac{x}{2}+x<\frac{x+1}{3} \\ 5-2x<1 \end{cases}$ $\quad 5)\frac{4x-3}{7+2x} \le 3$ $\quad 6)\frac{(2x-1)^2 \cdot (5+x^2) \cdot x^3}{(3x+5)(x-2)} \ge 0$

$7)\frac{(3-x)^2 (x+4)^3 (x+1)}{x^3 \cdot (3x-4)} < 0$

№1 бөлім бойынша бақылау сұрақтары.

1. Теңдеу дегеніміз не?
2. Теңдеу түбірі дегеніміз не?
3. Теңдеуді шешу дегеніміз не?
4. Қандай теңдеулер теңқуатты деп аталады?
5. $2x^2 - 10x = 12$ теңдеуінің түбірі қайсысы болады:
   1) -1; 2) 1; 3) 6; 4) -6?
6. 1,3 және – 1,3 сандарының әрқайсысы $x^2 = 1,69$ теңдеуінің түбірі болатынын дәлелдеу керек.
7. 1) 7(x - 3) = 49 и x – 3 = 7; 2) $\frac{2x}{3} = 9$ и 2x = 27; 3) $x^2 = 5x - 6$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$ теңдеулері теңқуатты бола ма?
8. Мына теңдеулерді шеш:
   1) 6(x + 4) = 3 – 2x; 2) 3(x + 3) + x = 9 + 4x ; 3) $x^2 + 3x = 0$; 4) $x^2 - 14x + 48 = 0$; 5) $\frac{x^2-4}{x} = \frac{3+2x}{2}$; 6) $x^2 - \frac{5x}{4} + \frac{3}{8} = 0$.
9. Қандай теңдеу квадраттық теңдеу деп аталады?
10. Дискриминант дегеніміз не?
11. Теңдеуді шешпей- ақ дискриминант арқылы оның неше түбірлері бар екенін анықта: а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$; б) $8x^2 - 4x + 0,5 = 0$; в) $x^2 - 10x + 34 = 0$.
12. Түбірлері арқылы теңдеуді құру керек: а) $x_1 = 3$, $x_2 = 10$; б) $x_1 = -7$, $x_2 = -4$; в) $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
13. Теңсіздік анықтамасы?
14. Теңсіздіктің қандай түрлерін білесіңдер?
15. Теңсіздіктерге қолданылатын амалдар ережелерін беріңдер?
16. Мына теңсіздіктерді шешу керек: 1) $16 - 3x \ge 0$; 2) $6x - 18 \rangle 0$; 3) $2x^2 - x - 1 \rangle 0$

Сабақ №5. II және III ретті анықтауыштар. Екі және үш айнымалысы бар теңдеулер жүйесін шешу.

Жоспар:

1. Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесі және оларды шешу
2. Үш айнымалысы бар теңдеулер жүйесі және оларды шешу
3. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар, олардың қасиеттері

Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесінің жалпы түрі: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

Теңдеулер жүйесінің шешімі деп бұл жүйенің әр теңдеуін қанағаттандыратын реттелген сандар қосы аталады. Бұл жүйені шешу үшін мынадай әдістер қолданылады: 1) алмастыру; 2) алгебралық қосынды; 3) графиктік.

Тағы бір әдіс $a_1;a_2;b_1;b_2$ коэффициенттері 1- ден өзгеше немесе әріпті болаған кезде ыңғайлы болады.

Теңдеулер жүйесін алайық:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ саны екінші ретті анықтауыш деп аталады. Вертикаль түзулер – анықтауыш таңбасы. Анықтауыш "Δ" (дельта) белгіленеді.

Сонымен анықтауыш – бұл қандай да бір ереже арқылы есептелетін сан.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$ – бірінші баған (x айнымалысының коэффициенттері)

$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ – екінші баған (y айнымалысының коэффициенттері)

$a_1 \quad b_1$ – бірінші жол (бірінші теңдеудің айнымалыларының коэффициенттері)

$a_2 \quad b_2$ – екінші жол (екінші теңдеудің айнымалыларының коэффициенттері)

Определители при переменных Δ_x және Δ_y айнымалыларының анықтауыштары бос мүшелер бағанымен берілген бағанды ауыстырудан шығады.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

x және y айнымаы мәндерін табу үшін $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ формулалары қолданылады, олар Крамер формулалары деп аталады.

Зерттейік:

1) Егер $\Delta\neq 0$ – жүйенің бір ғана шешімі бар
2) Егер $\Delta=0$, бірақ $\Delta_x\neq 0$ немесе $\Delta_y\neq 0$ жүйенің шешімі жоқ
3) Егер $\Delta=0$ және $\Delta_x=0$ және $\Delta_y=0$ – жүйенің шешімдер жиыны бар.

Мысал $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 6x+5y=1 \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-6\cdot(-4)=15+24=39 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=3-6\cdot 7=-39$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=35-(-4)\cdot 1=35+4=39 \qquad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{39}{39}=1 \qquad y=\frac{-39}{39}=-1$$

Жауабы: (1; –1).

Анықтауыштың негізгі қасиеттері

1. Анықтауыш өзгермейді, егер оның жолдары мен бағандарының орындарын ауыстырса және керісінше.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. Екі бағанды (жолды) орындарымен ауыстырса анықтауыштың таңбасы керіге ауысады.
3. Бірдей немесе пропорционал бағаны (жолы) бар анықтауыш 0- ге тең.
4. Бағанның (жолдың) ортақ көбейткішін анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

1 мысал.

1) $\begin{cases} 5x-7y=19 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=5\cdot3-2\cdot(-7)=15+14=29$ $\Delta\neq0$, жүйенің бір ғана шешімі бар.

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 19 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=57-(-4)\cdot(-7)=57-28=29$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-20-2\cdot19=-20-38=-58$ Жауабы: (1; –2).

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{29}{29}=1;$ $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-58}{29}=-2$

2) $\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$

Жүйені бізге белгілі барлық әдістермен шешіп, олардың қайсысы ыңғайлы екенін анықтайық:

1) Алмастыру әдісі.

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+8y=31 \\ 10x+7y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x+\frac{8}{3}y=\frac{31}{3} \\ 10x+7y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{31}{3}-\frac{8}{3}y \\ 10\left(\frac{31}{3}-\frac{8}{3}y\right)+7y=5 \end{cases}$

Екінші теңдеуді «*y*» қатысты шешеміз: $\frac{310}{3}-\frac{80}{3}y+7y=5$, ортақ бөлімге келтіреміз $3\neq0$, онда

$310-80y+21y=15$

$-59y=15-310$

$-59y=-295;$ $y=\frac{-295}{-59}=5$ Жауабы: $x=-3$; $y=5$.

$y=5$, тогда $x=\frac{31}{3}-\frac{8}{3}\cdot5=\frac{31}{3}-\frac{40}{3}=-\frac{9}{3}=-3$

2) Алгебралық қосу әдісі:

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$ бірінші теңдеуді 10-ға, ал екіншісін – 3- ке көбейтейік.

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}\begin{vmatrix} 10 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 30x+80y=310 \\ -30x-21y=-15 \end{cases}$ мүшелеп қосамыз.

$59y=295$

$y=5$

$y=5$ кез келген теңдеуге қоямыз, x –ті табамыз.

$3x+8\cdot5=31$

$3x+40=31$

$3x=-9$

$x=-3$

$x=-3$; $y=5$, біріншідегідей. (–3; 5)

3) графиктік.

4) Анықтауыш арқылы:

$$\begin{cases}3x+8y=31\\-10x-7y=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x+8y=31\\10x+7y=5\end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix}3 & 8\\10 & 7\end{vmatrix}=21-80=-59\neq 0 \text{ бір ғана шешімі бар.}$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}31 & 8\\5 & 7\end{vmatrix}=217-40=177 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 31\\10 & 5\end{vmatrix}=15-310=-295$$

$$x=\frac{177}{-59}=-3; \qquad y=\frac{-295}{-59}=5$$

Жауабы: (–3; 5).

Ең ыңғайлысы анықтауыш арқылы есептеу.

Есептеу керек:

$$1)\begin{cases}4x-9y=22a\\11x+5y=a\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}2x-3y=11\\6x-9y=33\end{cases} \qquad 3)\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\\[2mm]\dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=1\end{cases}$$

Үш айнымалысы бар үшінші ретті теңдеулер жүйесі:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3\end{cases}$$

Оны үшінші нретті анықтауцыш арқылы шешуге болады.

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ түріндегі кесте үшінші ретті анықтауыш деп аталады.

Үшінші ретті анықтауышты екінші ретті анықтауыш арқылы немесе Саррюс ережесі арқылы табуға болады (үшбұрыш ережесі).

1) II ретті анықтауыш арқылы.

$$\begin{vmatrix}\boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot\left(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}\right)+a_{13}\cdot\left(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}\right)$$

a_{11} бөліп, ойда бірінші жол мен бірінші бағанды сызып тастаймыз, қалған мүшелерінен екінші ретті анықтауыш құрамыз. a_{12} - ты қарама- қарсы таңбамен алып, бірінші жол мен екінші бағанды сызамыз, қалған мүшелерінен екінші ретті анықтауыш құрамыз. Дәл сол сияқты, a_{13}

II ретті анықтауышты есептейміз.

Мысалы:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & -4\\-4 & 1 & 3\\5 & 7 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\7 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-4 & 3\\5 & -1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-4 & 1\\5 & 7\end{vmatrix}=3\cdot\left(-1-21\right)+2\left(4-15\right)-4\left(-28-5\right)=$$

$$=-66-22+132=-88+132=44;$$

2) Үшбұрыш ережесі (Саррюс). Схемалы түрде:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \underset{a}{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} - \underset{b}{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

Мысалы:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -3-30+112+20-63+8=-96+140=44$$

$\Delta_x;\Delta_y;\Delta_z$ анықтауыштарын екінші ретті анықтауыштарды есептегендей есептейміз.

$x;y;z$ мәндерін табу үшін Крамер ережесін қолданамыз.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Зерттейміз:

4) Егер $\Delta \neq 0$ жүйенің бір ғана шешімі бар
5) Егер $\Delta = 0$ жүйенің шешімі жоқ
6) Егер $\Delta = 0$ және $\Delta_x = 0$ және $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ – жүйенің шешімдер жиыны бар.

Теңдеулер жүйесін шешу керек.

$$1)\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ 5x-y-z=10 \\ x-y+5z=-12 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 15-1-5+1-3-25=-20-28=-48 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10+12-10-12+2-50=24-72=-48$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 150+2-60-10-36+50=202-106=96$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 36+10+10-2+30+60=56+90-2=146-2=144$$

$$x=\frac{-48}{-48}=1; \qquad y=\frac{96}{-48}=-2; \quad z=\frac{144}{-48}=-3$$

Жауабы: (1; –2; –3).

$$2)\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 6x+3y+3z=12 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_x=0, \ \Delta_y=0, \ \Delta_z=0,$$

Жолдары бір біріне пропорционал болғандықтан.

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Жүйенің шешімдер жиыны бар, яғни анықталмаған.

Сабақ №6. II және III ретті анықтауыштар. Екі және үш айнымалысы бар теңдеулер жүйесін шешу.

Есептер шығарту.

$$1)\begin{cases} 2x+3y-z=7 \\ 4x+5y-4z=3 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases} \qquad \left(\Delta=-37; x=1; y=3; z=4\right)$$

$$2)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x-4y+6z=5 \\ 4x-8y+12z=7 \end{cases} \qquad \left(\Delta=0 \, \text{система не имеет решения}\right)$$

$$3)\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ 13x+2y+z=13 \end{cases} \qquad (\Delta=0; \Delta_x=0; \Delta_y=0; \Delta_z=0 \text{ жүйенің шешімдер жиыны бар})$$

Бақылау сұрақтары:

1. Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесінің жалпы түрі қандай?
2. Екі айнымалысы бар теңдеулер жүйесін шешу әдістерін атаңдар?
3. Екінші ретті анықтауыш дегеніміз не?
4. Оның негізгі қасиеттері қандай?
5. Үш айнымалысы бар теңдеулер жүйесінің жалпы түрін көрсет?
6. Үшінші ретті анықтауыш дегеніміз не?
7. Оны табудың негізгі әдістерін ата?
8. Негізгі қасиеттері қандай?

Бөлім II Функциялар,олардың қасиеттері және графиктері.

Сабақ №7. Сандық тізбек функциясы, функцияның берілу тәсілдері.

Жоспар:

1. **Функция ұғымы**
2. **Функцияның берілу тәсілдері**
3. **Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны**

Функция ұғымы математиканың негізгі ұғымдарының бірі болып табылады.

Егер D жиынының әрбір x элементіне E жиынының бір ғана y элементі сәйкес қойылса, онда D жиынында $y=f\left(x\right)$функциясы берілген деп атайды..

x – аргумент – тәуелсіз айнымалы; y – тәуелді айнымалы; ол f заңы арқылы табылады. D жиыны функцияның анықталу облысы болып табылады, ал E жиыны функцияның мәндер жиыны деп аталады.

M1, Аргумент мәндерінің жиыны- сендердің өз жек бастарын, ал функцияның мәндер жиыны- сендердің аты- жөндерін. Бірақ біз сандық тізбек функциясын қарастырудамыз. Яғни D және E жиындары – сандық жиындар. Яғни сандық тізбек функциясы бұл бірінші элементтері бірдей болмайтын (x,y) парын айтады.

Функция қалай беріледі?Ең негізгісі формуламен, онда x арқылы y табылады.

Мысал: f(x) = x^2 +x +3. x = 2 қойсақ, y = 9 аламыз.

Функция бірнеше аналитиалық өрнек түрінде берілуі мүмкін:

Мысал:

$$y=\begin{cases} x^2, \, \textit{если } x<0; \\ x, \, \textit{если } x\geq 0 \end{cases}$$

Кейбір жағдайда функциялық тәуелділікті аналитикалық түрде беру мүмкін емес, ондай кезде функцияның кестелік берілуі қолданылады.

x	-3	-1	0	3	5	6	8	11	13
y	45	22	12	2	-4	3	13	25	34

Және ең соңғысы: егер алдыңғы 2 жағдайда функцияны беру мүмкін емес болса, онда графиктік тәсіл қолданылады. Өздеріңнің кардиограммаларыңды еске түсіріңдер.

Функцияның анықталу облысын табудың жолдарын қрастырайық:
1-мысал: f(x)= $\sqrt{1-x^2}$ функцияның анықталу облысы мен мәндер жиынын табу керек.
Анықталу облысы [-1;1] кесіндісі болады. Ал мәндер жиыны у-тің қабылдайтын мәндері, яғни: [0;1]
2-мысал: f(x)=1/x функциясы берілсін.
Анықталу облысы 0- ден өзге сандардың барлығы, ал мәндер жиыны: E(f)= (-∞;0) U(0;+∞) болады.
3- мысал: f(x)= sin функциясының анықталу облысы бүкіл сан түзуі болады. Ал мәндер жиыны [-1;1] кесіндісі болады.
Келесідей функциялардың анықталу облысы мен мәндер жиынын табу керек.
№1
a) $F(x)=x+\frac{1}{x}$
b) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$
c) $F(x)=\sqrt{3x-2}$
в) $F(x)=\frac{x+3}{2x-5}$ функцияларының анықталу облысы мен мәндер жиынын табу керек.
№2
A) $F(x)=ax+b$
B) $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
C) $F(x)=ax^2+bx+c$
D) $F(x)=\frac{1}{x+2}$
E) $F(x)=x^2-5x+6$
F) $F(x)=2x^3-5$
G) $F(x)=3x^3+2x^2-1$
Функцияларының графиктерін анықтаңдар және ох, оу осьтерімен қиылысу нүктелерін табыңдар.
№3
a) F(x)= 1;
b) F(x)= x;
c) F(x)= $\sqrt{x}$;
d) F(x)= $\sqrt{x^2+4}$;
e) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$;
f) $F(x)=\frac{x+1}{x-1}$;
g) F(x)= $|x^2|$; функцияларының мәндер жиынын табу керек.
№4
Функциялардың графиктерін салу керек.
a) $F(x)=x^2+2x-3$;
b) $F(x)=x^2-5x+6$;
c) $F(x)=\frac{1}{x-2}$;
d) $F(x)=\frac{2}{x+3}$;
e) $F(x)=x^3+4$;
f) $F(x)=(x-1)^3$ функцияларының графигін салу керек.

Бақылау сұрақтары:

1. Функция дегеніміз не?
2. Функцияның берілу тәсілдері?
3. Функцияның қандай түрлерін білесін?
4. Функцияның анықталу облысы деген не?
5. Функцияның мәндер жиыны деген не?

Сабақ №8. Функция графиктерін қарапайым түрлендіру.

Жоспары:

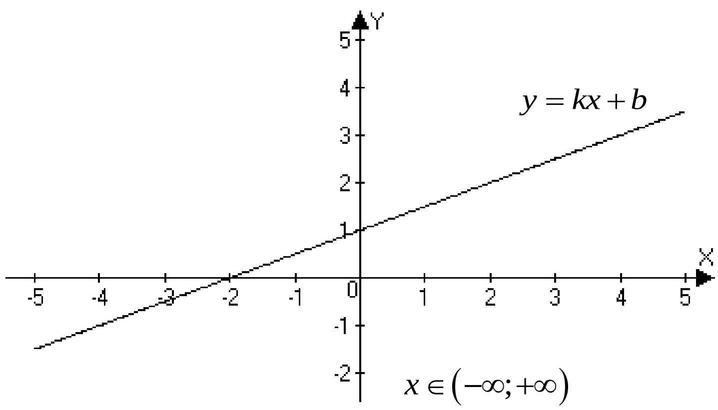
1. Функцияның графиктік берілуі
2. Функция графиктерін қарапайым түрлендіру ережелері

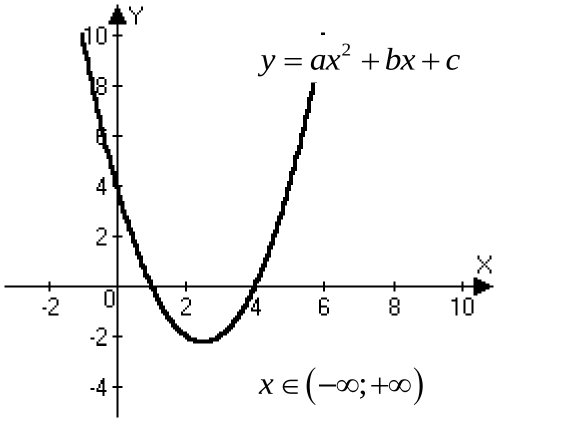
Мақсаты: Функция, оның графигі туралы білімдерді жалпылап жүйелеу. Оқушыларды функция графиктерін қарапайым түрлендірудің негізгі жолдарын естеріне түсіріп, қоладнысын көрсету.

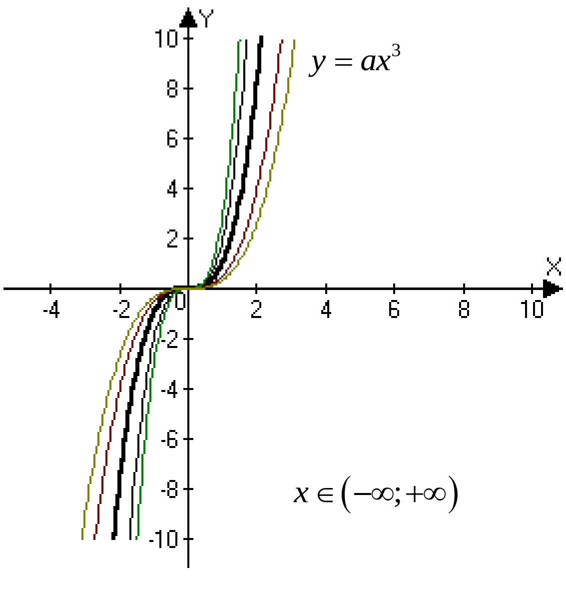
Ең бірінші функция туралы негізгі ұғымдарды еске түсірейік. Мынадай сұрақтарға жауап берейік:

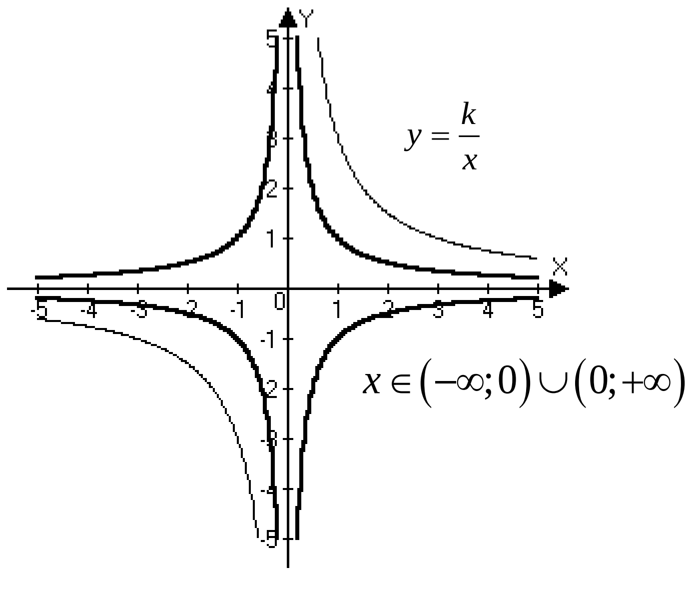
6. Функция дегеніміз не?
7. Функцияның берілу тәсілдері?
8. Функцияның анықталу облысы деген не?
9. Функцияның мәндер жиыны деген не?

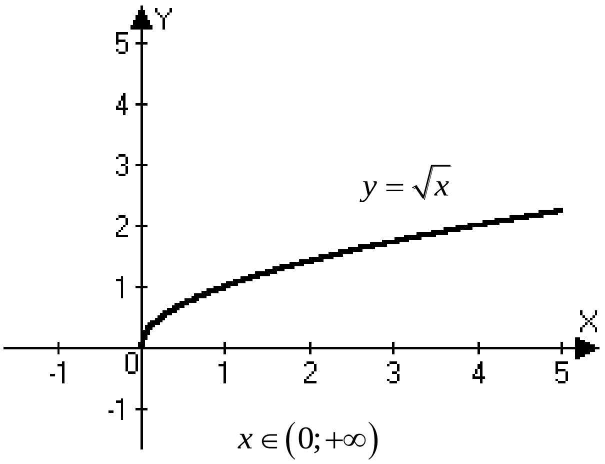
Функцияның аналитикалық берілуінде біз оның анықталу облысын тапқанбыз, ендігі графиктері бойынша оның мәндер жиынын тауып көрейік. Мына функциялардың графиктері бойынша олардың мәндер жиынын анықтаңдар.









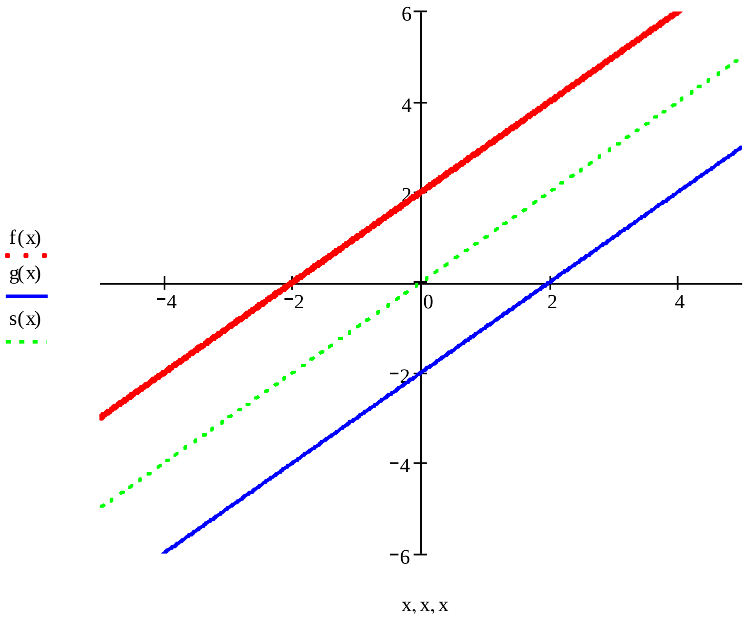


Осы функциялардың графиктерін түрлендірудің бірнеше ережесін жазып алайық:

1. f(x)+c функциясының гафигі f(x) функциясының графигін y осі бойынша c бірлік жоғары немесе төмен жылжытқаннан пайда болады.

Мысал1.

y=x+2 және y=x-2 функцияларының графигін қарастырайық.

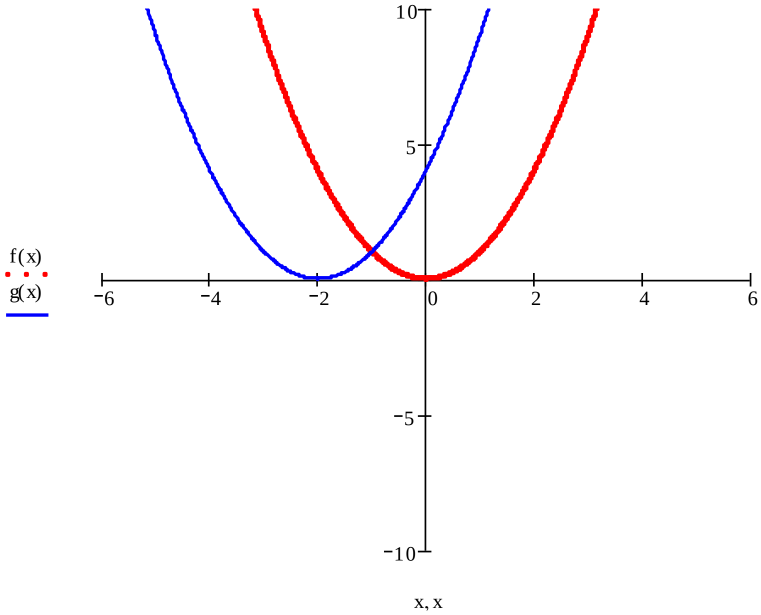


Берілген функциялардың графиктері y=x функциясының графигін c>0 болғанда сонша бірлік жоғары, теріс болғанда төмен жылжытқаннан пайда болады.

2. f(x+c) функциясының графигі f(x) функциясының графигін c бірлік x осі бойынша оңға не солға жылжытудан пайда болады.

Мысал2.

y=(x+2)^2 функиясының графигі y=x^2 функциясының графигін 2 бірлік солға қарай жылжытудан пайда болады. Ал бұл функцияның графигі (0,0) бас нүктесі болатын парабола екендігін өздерің білесіңдер.

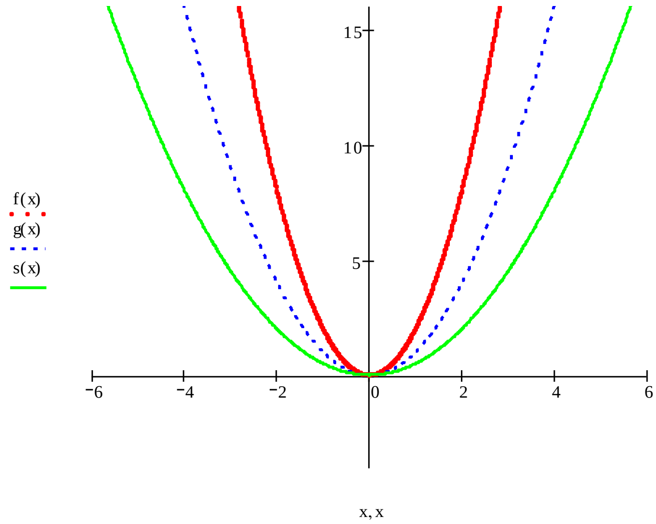


3. кf(x) функциясының графигі f(x) функциясының графигін к есе созу немесе сығудан пайда болады.

Егер к саны 0 мен 1-дің арасында болса, онда берілген график х осіне қарай жақындайды, егер 1-ден үлкен болса, онда у осіне қарай жақындайды.

Мысал3.

$y=2x^2$ функциясының графигі $y=x^2$ функциясының графигін 2 есе сығудан пайда болады.



Келесідей функциялардың графиктерін осындай түрлендірулер арқылы салуға болады.

1) $y=x;$ $\quad y=kx;$ $\quad y=kx+b$

2) $y=x^2;$ $\quad y=ax^2;$ $\quad y=x^2+c;$ $\quad y=(x-m)^2;$ $\quad y=ax^2+bx+c;$

3) $y=x^3;$ $\quad y=ax^3;$ $\quad y=x^3+c;$ $\quad y=(x+m)^3;$

4) $y=\dfrac{k}{x};$ $\quad y=\dfrac{k}{x+n};$ $\quad y=\dfrac{k}{x}+c;$

5) $y=\sqrt{x};$ $\quad y=\sqrt{x+a};$ $\quad y=\sqrt{x}+c.$

Бақылау сұрақтары:

1. Функция дегеніміз не?
2. Функцияның берілу тәсілдері?
3. Функцияның анықталу облысы деген не?
4. Функцияның мәндер жиыны деген не?
5. Функцияның қандай түрлерін білесін?
6. Функция түрлерінің графиктері қандай?
7. Функцияның графигін сызуда қандай түрлендірулер қолданылады?
8. Қарапайым түрлендірудің тиімділігі неде?

Сабақ №8. Функция графиктерін қарапайым түрлендіру.

Жоспары:

1. **Функция графиктерін қарапайым түрлендіру**
2. **Қарапайым түрлендіру ережелерін функция графигін сызуда қолдану**

Мақсаты: Функция, оның графигі туралы білімдерді жалпылап жүйелеу. Оқушыларды функция графиктерін қарапайым түрлендірудің негізгі жолдарын естеріне түсіріп, қоладнысын көрсету.

Ең бірінші функция туралы негізгі ұғымдарды еске түсірейік. Мынадай сұрақтарға жауап берейік:

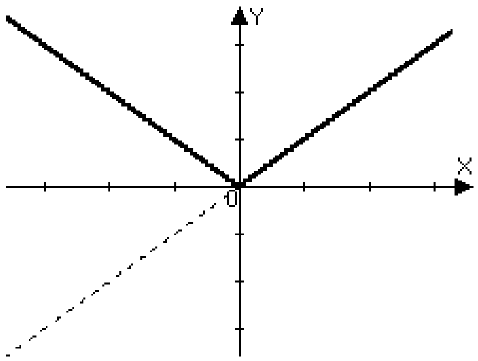
1. Функция дегеніміз не?
2. Функцияның берілу тәсілдері?
3. Функцияның анықталу облысы деген не?
4. Функцияның мәндер жиыны деген не?

Функциялардың графиктерін түрлендірудің бірнеше ережесін жазып алайық:

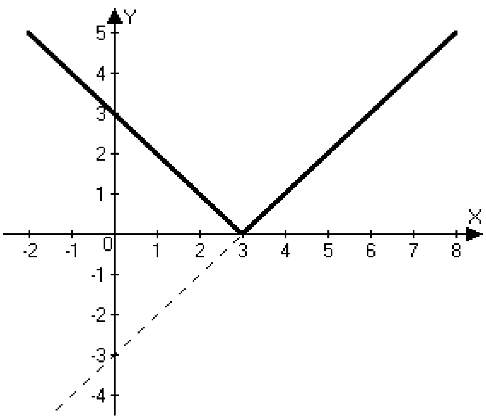
6) y = $|f(x)|$ - бұл функцияның графигін тұрғызу үшін y = f(x) функциясының графигін сызып, оның Ох осінен төмен салынған бөлігін сол ось бойынша бейнелеу керек.

Мысал.

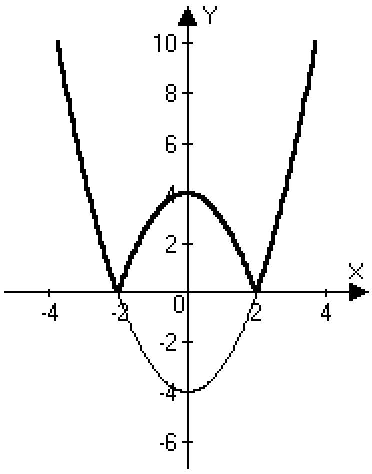
y = $|x|$



y = x – 3; y = $|x-3|$



y = $|x^2-4|$ y = x^2 – 4



Енді өз беттерімен мына функциялардың графиктерін сызып көріңдер.

$y = |x-3|$ $y = x^3 - 2$ $y = \dfrac{4}{x-1}$ $y = (x+2)^2$ $y = \sqrt{x+2}$

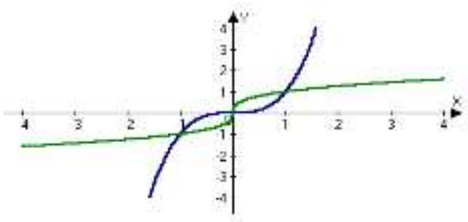
Бақылау сұрақтары:

1. Функция дегеніміз не?
2. Функцияның берілу тәсілдері?
3. Функцияның анықталу облысы деген не?
4. Функцияның мәндер жиыны деген не?
5. Функцияның қандай түрлерін білесің?
6. Функция түрлерінің графиктері қандай?
7. Функцияның графигін сызуда қандай түрлендірулер қолданылады?
8. Қарапайым түрлендірудің тиімділігі неде?

Сабақ №9. Кері функциялар. Функциялардың қасиеттері: монотондылығы, тақтығы мен жұптығы, периодтылығы.

Жоспары:

1. **Кері функция ұғымы**
2. **Функцияның қасиеттері**
3. **Функция қасиеттерін есеп шығаруда қолдану**



Кері функциялар.

$y = x^3$ функциясы берілсін. Бұл функция бізде монотонды, функцияның әрбір аргументіне оның тек бір ғана мәні сәйкес келіп отырады. Енді у- ті тәуелсіз айнымалы деп алып, х – оның функциясы ретінде қарастырайық. х- ті у арқылы өрнектейік.

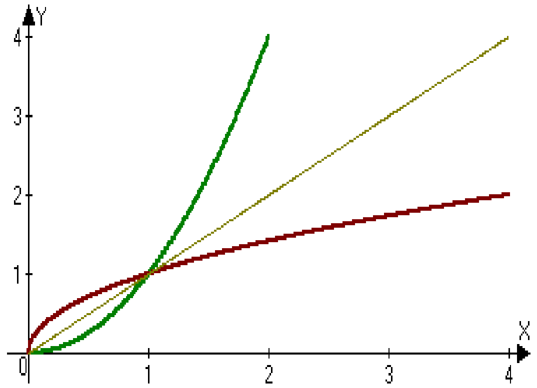
$x = \sqrt[3]{y}$ мұндағы х пен у орнындарын ауыстырайық.

$y = x$ $y = 2x;\ y = \frac{1}{2}x$ $y = x - 4$ $y = 2x + 1$ $y = kx + b$	$y = x^2$ $y = 2x^2;\ \ y = \frac{1}{2}x^2$ $y = x^2 - 4$ $y = (x-4)^2$ $y = 2(x+3)^2 - 1$	$y = x^3$ $y = 2x^3;\ y = \frac{1}{2}x^3$ $y = x^3 + 2$ $y = (x-2)^3$	$y = \frac{4}{x}$ $y = \frac{4}{x+3}$ $y = \frac{4}{x-1}$	$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x-4}$ $y = \sqrt{x} + 2$

Тәуелсіз айнымалымыз x болсын, y оның функциясы болсын.

$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ бұл екі функция **өзара кері функциялар** деп аталады.

Бұл функциялардың графиктерін сызайық. Олардың графиктері I және III координат бұрыштарына қарағанда симетриялы болып табылады. Барлық өзара кері функциялардың бұл қасиетін естеріне сақтап алыңдар.



Егер берілген функцияларын монотонды болмаса, онда оның кері функциясы қандай болады? Мысал үшін монотонды болмайтын $y = x^2$ функцияның кері функциясын табу керек болсын. Онда оның монотонды болатын аралығын алу керек. Егер $y = x^2$ функцияның D = [0; ∞) аралығын алсақ, онда бұл аралықта функция монотонды өспелі және оның аралықтағы кері функциясы бар болады. Оның кері функциясы $y = \sqrt{x}$ Олардың графиктерін сызып көрейік. Яғни графиктері I, III координаталық бұрыштарға қарағанда симметриялы.

Өз бетерімен жұмыс істеп көріңдер..

Сызықтық монотонды функция үшін кері функцияның графигін сызып көріңдер. y = 3x.

$y = \dfrac{1}{x^2}$ функциясының D = [0; ∞) аралығында кері функциясын табыңдар.

Функцияны зерттеуде оның негізгі қасиеттерін қолданылады. Енді осыларға жеке тоқталайық.

1. **Функцияның монотондылығы.** Егер (a;b) интервалының x_1, < x_2 шартын қанағаттандыратын x_1, x_2 үшін $f(x_1) < f(x_2)$ орындалса, онда (a;b) аралығында функция *өседі* деп айтады. Басқаша, егер де аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда функция өседі. Дәл сол сияқты кемитін функция үшін. Егер берілген аралықта функция тек өсетін немесе кемитін болса, онда функция *монотонды* деп аталады.

Мысал үшін сызықтық функция монотонды болып табылады, ал квадраттық функция монотонды болмайды. Себебі, x < 0 функия кемиді, ал x > 0 функция өседі.

2. **Функцияның шенелуі.** D облысында $y = f(x)$ функциясы берілсін Егер кез келген x ∈ D үшін $m \le f(x) \le M$ шартын қанағаттандыратын m және M сандары табылса, онда берілген функция анықталу облысында шенелген деп айтады. Сонымен қатар, мынадай түсініктер бар: жоғарыдан шенелген және төменнен шенелген. Мысал үшін, $y = x^3$ – шенелмеген функция, ал $y = x^2$ – төменнен шенелген, себебі ол анықталу облысында оң болады. y = Sinx және y = Cosx – шенелген функциялар, себебі олар [-1; 1] кесіндісінде ғана мәндерді қабылдайды– бұл олардың мәндер жиыны

3. **Тақтылығы мен жұптылығы.** Функция жұп деп аталады, егер оның анықталу облысы x = 0 –ге қарағанда симметриялы және $f(-x) = f(x)$ болса;

Функция тақ деп аталады, егер оның анықталу облысы x = 0 –ге қарағанда симметриялы және $f(-x) = -f(x)$ болса.

Жұп функцияның графигі ордината осіне қарағанда симметриялы болып табылады, ал тақ– координат басына қарағанда.

Жұп функцияларға y = x^2, y = Cosx, $y=\dfrac{1}{x^2}$, ал тақ функцияларға y = x^3, y = Sinx, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$ мысал бола алады. Кейбір функциялар тақ та, жұп та бола алмайды. Мысал үшін $y=\sqrt{x}$ функциясы тақ та емес, жұп та емес функция болады. Себебі ол 0- ге қатысты симметриялы болмайды. Мұндай функциялар жалпы түрдегі функциялар деп аталады.
Функцияның тақ- жұптылығын анықтаудың әдістемесі қандай? Мысалдар қарастырайық:

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; x орнына -x,қойып функция мәнін есептеп көрейік:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x^3}{x^2+1}=-\dfrac{x^3}{x^2+1}=-f(x)$ Тақ функцияның анықтамасын алдық, яғни берілген функция тақ.

$f(x)=\dfrac{Cosx}{x^4+1}$; x орнына –x қойып көрейік, мынаны аламыз:

$f(-x)=\dfrac{Cos(-x)}{(-x)^4+1}=\dfrac{Cosx}{x^4+1}=\dfrac{Cosx}{x^4+1}=f(x)$ Жұп функцияның анықтамасын алдық, яғни функция жұп.

4. **Периодтылық**. Функция $y=f\left(x\right)$ периодты деп аталады, егер анықталу облысының кез келген x мәні үшін T саны табылып, $f\left(x+T\right)=f\left(x\right),\ где\ T\neq 0$теңдігі орындалса. Функцияның T периоды деп аталатын сан бар болса, онда nT саны да, мұндағы n – бүтін сан,функцияның периоды болады. Периодты функциялардың айқын мысалдары тригонометриялық функциялар бойып табылады. Оларды сендер алдағы уақытта өтесіңдер.

Анықталу облысының қайсыбір аралықтарында функция тек оң, ал басқа аралықтарында теріс мәндерді қабылдаса, онда мұндай аралықтарды функцияның таңба тұрақтылық аралықтары деп атайды.

Мысалы, $y=\dfrac{x^2+6}{x}$

Интервалдар әдісі бойынша $\left(-\infty,0\right)$ аралығында функция теріс таңбалы, $\left(0,+\infty\right)$ аралығында оң таңбалы болады.

Есептер шығарту:

№29

Функцияның жұп немесе тақтылығын анықтау керек:

а) $f(x)=5x^4+2x^2$; ә) $f(x)=3x^2+\cos\dfrac{3x}{2}$

б) $f(x)=-6+\sin^2 x$; в) $f(x)=-10x^8+2.5$

№32

Функцияның таңба тұрақтылық аралықтарын анықтаңдар:

а) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+3x}$

ә) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

б) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-8x}{x^2-1}$

№33

Функцияның жұп немесе тақтылығын анықтау керек:

а) $f(x)=0.5x^3-5x^2$

ә) $f(x)=\left|x^2-1\right|+3x^6$

б) $f(x)=\dfrac{16-x^4}{\sin 4x}$

в) $f(x)=\dfrac{x\left(x^4-1\right)}{2\cos x}$

№35

Функцияның таңба тұрақтылық аралықтарын анықтаңдар:

а) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$

ә) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$

б) $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+6x}{x^2+2x-3}$

№36

Берілген функциялардың кері функцияларын анықтаңдар және графиктерін салыңдар:

а) $f(x)=3x-7$

ә) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

б) $f(x)=6-2x$

Үй тапсырмасы:

№29, №32 24-25 беттер.Алгебра және анализ бастамалары.10 сынып. Әбілқасымова

Бақылау сұрақтары:

1. Функция дегеніміз не?
2. Функцияның анықталу облысы дегеніміз не?
3. Функцияның мәндер жиыны дегеніміз не?
4. Функцияның берілу тәсілдері қандай?
5. Функцияның графиктерін қарапайым түрлендірулері қандай?
6. Кері функция дегеніміз не?
7. Функцияның негізгі қасиеттері?
8. Функцияның тақ-жұптиылығы?
9. Функцияның таңба тұрақтылық аралықтары?

Сабақ №10. Бақылау жұмысы

Жоспары:

1. **Функция туралы негізгі мәліметтер**
2. **Оның қасиеттеріне байланысты есептер**
3. **Бақылау жұмысы**

Есеп шығарту:

№16 Функцияның анықталу облысын табу керек:

а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}}$

ә) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2-4}}$

б) $f(x)=x\sqrt{2-x}$

в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{16-x^2}}+\dfrac{1}{x}$

№27 Қарапайым түрлендірулерді қолданып графигін сал.

а) $f(x)=\sqrt{x-2}+1$

б) $f(x)=\sqrt{3-x}-3$

№25

а) $f(x)=-3(x-4)^2-1$

ә) $f(x)=2(x^2-1)$

б) $f(x)=2\sqrt{x}+1$

в) $f(x)=\sqrt{x}-3$

№41, №42 26-27 беттер

Бақылау жұмысы.

I нұсқа

1. $f(x)=\sqrt{2x-5}$ функциясының анықталу облысын тап.
2. $f(x)=4x^6+2\cos 2x$ функциясының тақ-жұптылығын анықта.
3. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-16}$ функциясының таңба тұрақтылық аралықтарын анықтау керек.
4. $f(x)=2x+3$ функциясының кері функциясын анықтап, графиктерін сызу керек.
5. $f(x)=\sqrt{x-5}+2$ қарапайым түрлендірулерді қолданып графигін сал.

II нұсқа

1. $f(x)=\sqrt{3x+7}$ функциясының анықталу облысын тап.
2. $f(x)=3x^5+2\sin 3x$ функциясының тақ-жұптылығын анықта.
3. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ функциясының таңба тұрақтылық аралықтарын анықтау керек.
4. $f(x)=4x-3$ функциясының кері функциясын анықтап, графиктерін сал.
5. $f(x)=\dfrac{2}{x+3}-1$ қарапайым түрлендірулерді қолданып графигін сал.

III нұсқа

1. $f(x)=\dfrac{2+x}{x-3}$ функциясының анықталу облысын тап.
2. $f(x)=7x^5+2x$ функциясының тақ-жұптылығын анықта.
3. $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+6}$ функциясының таңба тұрақтылық аралықтарын анықтау керек.
4. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+4$ функциясының кері функциясын анықтап, графиктерін сал.
5. $f(x)=2(x+1)^2+5$ қарапайым түрлендірулерді қолданып графигін сал.

IV нұсқа

1. $f(x)=\frac{x-3}{2x+6}$ функциясының анықталу облысын тап.
2. $f(x)=7x^4+5x^2$ функциясының тақ-жұптылығын анықта.
3. $f(x)=\frac{x(x+3)}{x-1}$ функциясының таңба тұрақтылық аралықтарын анықтау керек.
4. $f(x)=-\frac{2}{3}x-6$ функциясының кері функциясын анықтап, графиктерін сал.
5. $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^3+2$ қарапайым түрлендірулерді қолданып графигін сал.

№2 бөлім бойынша бақылау сұрақтары.

1. Функция ның анықтамасын бер.
2. Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны дегеніміз не?
3. f функциясы қостар жиынымен берілген $\left(\frac{1}{2};2\right),\left(\frac{2}{3};6\right),\left(\frac{3}{4};12\right),(2;2)$. D(f) және E(f) көрсетіңдер. f($\frac{1}{2}$), f($\frac{3}{4}$), f(2) табыңдар.
4. Функция y=5-x формуласымен X жиынында берілген. Функцияның Y мәндер жиынын табыңдар, егер X=$\{0;1;2;3;4;5\}$.
5. Кемімелі және өспелі функция анықтамасын бер.
6. f(x)=2x+3 формуласымен берілген функция өспелі болатынын дәлелде.
7. f=-0,5x + 5 3 формуласымен берілген функция кемімелі болатынын дәлелде.
8. Жұп және тақ функция анықтамасын бер.
9. Периодтық функцияның анықтамасын бер.
10. Сызықтық функция дегеніміз не? Оның анықталу облысы мен мәндер жиыны қандай?
11. Сызықтық функцияның графигі қандай сызық болады?
12. Қандай түрлендіру арқылы y = x функциясының графигінен келесідей функциялардың графиктерін алуға болады: а) y = kx + b; б) y = k(x + a)?
13. Квадраттық функция дегеніміз не? Оның анықталу облысы мен мәндер жиынын көрсет.
14. Парабола төбесі қандай формуламен есептеледі?
15. Геометриялық түрлендірулдер арқылы келесідей функциялардың графиктерін қалайша құруға болады: а) y = 3(x - 2)^2 + 1 ; б) y = (2x + 3)^2 – 1?
16. y =$\frac{k}{x}$ функциясы берілген. Ол қалай аталады? k, және x қандай шектеулер қойылады?
17. y = $\frac{k}{x}$ формуласымен берілген функцияның анықталуоблысы не болады?
18. y =$\frac{k}{x}(k=0)$ функциясының графигі қалай аталады? Оның тармақтары қалай орналасады?
19. Функцияның тақ- жұптылығын анықтаңдар:

а) y =$\frac{x}{x^2-4}$; b) y = $\frac{x-3}{x+1}$; в) y = $\frac{x-x^3}{1+x^2}$.

20. Функциялардың графиктерін құрыңдар:

а) y = $\frac{1}{x-2}$; б) y = $\frac{1}{2-x}$; в) y = 2 + $\frac{3}{x-4}$.

Бөлім III Көрсеткіштік, логарифмдік және дәрежелік функциялар.

Сабақ №11. Рационал көрсеткішті дәреже, оның қасиеттері.

Жоспары:

1. **Бүтін көрсеткішті дәреже ұғымы мен оның қаситеттерін қайталау**

2. **Рационал көрсеткішті дәреже ұғымы**
3. **Оның негізгі қасиеттері**
4. **Рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттері**

Сендерге санның бүтін көрсеткішті дәрежесі деген ұғым бұрыннан таныс. Сондай дәреженің қасиеттерін еске түсірейік.

Кез келген a,b сандары және кез келген бүтін m мен n сандары үшін мынадай теңдіктер тура:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$;

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$;

$a^1 = a, a^0 = 1, (a \neq 0)$.

Енді мынадай қасиетті атап өтейік: егер $m > n$ болса, онда $a^m > a^n$ болады және $0 < a < 1$ болғанда $a^m < a^n$ болады.

Анықтама. a>0 санның рационал $r = \frac{m}{n}$ көрсеткішті дәрежесі деп $\sqrt[n]{a^m}$ санын айтады, мұндағы m- бүтін сан, ал n- натурал сан $(n > 1)$.

Сонымен, анықтама бойынша

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

0 санының дәрежесі оң көрсеткіштер үшін ғана анықталған: анықтама бойынша кез келген $r > 0$ үшін $0^r = 0$.

1- мысал. Бөлшек көрсеткішті дәреженің анықтамасы бойынша

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}, 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}, a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a^7}}$$

1-ескерту. Бөлшек көрсеткішті дәреженің анықтамасынан кез келген оң a саны мен кез келген рационал r саны үшін a^r оң сан болатындығы шығады.

2- ескерту. Рационал санның қай- қайсысын да бөлшек түрінде түрліше жазып көрсетуге болады, өйткені кез келген k саны үшін $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ деп жаза аламыз. a^r мәні де рационал r санының жазылу түріне байланысты емес. Шындығында, түбірлердің қасиеттеріне сүйеніп былай жазамыз:

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

a<0 болғанда a санының рационал дәрежесі анықталмайды, ал бұл жағдай тегін емес. Егер де формуланы a<0 болғанда да тура деп тапсақ, онда, мысалы, $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ - ге тең болар еді. Алайда, екінші жағынан, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, сондықтан да мына теңдік орындалуы тиіс.

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2$$

Енді рационал көрсеткішті дәреженің жоғарыда тұжырымдалған анықтамасын ескергенде бүтін көрсеткішті дәрежелер үшін тура негізгі қасиеттер сақталып қала береді.

Кез келген рационал r мен s сандары үшін және кез келген оң a мен b сандары үшін мына теңдіктер орындалады:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, a^r \div a^s = a^{r-s} (a \neq 0)$;

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r, \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, (b \neq 0)$$

2-мысал. $\left(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right) \div 5^{-\frac{3}{4}}$ өрнегінің мәнін табайық. Сонда:

$$\left(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right) \div 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10$$

Рационал көрсеткішті дәрежелердің келесі екі қасиетін атап өтейік.
Айталық, r- рационал сан және $0<a<b$ болсын.
Сонда $r>0$ болғанда $a^r<b^r$
$r<0$ болғанда $a^r>b^r$.
Кез келген рационал r мен s сандары үшін $r> s$ теңсіздігінен мыналар шығады:
$a>1$ болғанда $a^r>a^s$,
$0<a<1$ болғанда $a^r<a^s$.

3-мысал. $\sqrt[5]{8}$ және $2^{\frac{2}{3}}$ сандарын салыстырайық.
$\sqrt[5]{8}$ санын рационал көрсеткішті дәреже түрінде жазайық:
$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$. Соңғы қасиет бойынша $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$ жазамыз, өйткені $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$

Есеп шығарып көрейік:
№1 Амалдарды орындаңдар:

а) $(2 \cdot 3)^2 + (-3 \cdot 4)^3 - (5 \cdot 2)^4$; б) $a^3 - (-a)^3 + (2a)^2 - 5(-a)^2 + 7a - 2^0$

в) $12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \left(2\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^5$; г) $\left(\frac{a}{2b}\right)^n \left(\frac{2^0 b}{5c}\right)^n \left(\frac{5c}{b}\right)^n \cdot 2^n$.

№2 Есептеңдер:

а) $\left(\left(2\frac{1}{3}\right)^{-1} - 7^{-1}\right)^{-1}$; б) $\frac{0{,}1^{-1} - (0{,}19)^0}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}}$;

в) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - 3^{-2}\right)^{-3}$; г) $\frac{2^{-2} + \left(\frac{9}{11}\right)^0}{5 \cdot (-4)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$.

№3 Теріс дәрежеден құтылу керек:

а) $7a^{-3}b^{-2}c$; б) $\frac{6a^{-3}b^{-2}n}{5c^{-2}m^{-3}}$; в) $\frac{(a-b)^{-3}}{(a+b)^{-2}\ p^{-3}}$; г) $\frac{5ab^2(a-b)^{-3}}{(a+b)^{-2}}$.

№4 Теңдеуді шеш:

а) $x - 8 + 15x^{-1} = 0$; б) $y - 5 - 14y^{-1} = 0$.

№5 Ықшамдаңдар:
Қосымша:

а) $\left(\frac{b^{-1} - y^{-1}}{b^{-1} + y^{-1}} - \frac{b^{-1} + y^{-1}}{b^{-1} - y^{-1}}\right) \cdot \frac{1}{4}(yb^{-1} - by^{-1})$;

б) $\left(\frac{p^{-1} - y^{-1}}{p^{-1}y - py^{-1}} \cdot \frac{py^{-1} + 1}{p^{-1}y^{-1}}\right) : \frac{py^{-1}}{y - p}$.

№6 Амалдарды орында:

а) $a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{2}}$; ә) $b^{-\frac{3}{4}} \div b^{-\frac{1}{5}}$; б) $8a^{\frac{6}{7}} \div 2a^{\frac{3}{4}}$; в) $27a^{-\frac{8}{11}} \div 9a^{\frac{1}{3}}$; г) $\left(\frac{32a^{-\frac{3}{4}}}{b^3x^5}\right)^{-0.2}$; д) $\left(\frac{a^3b^{1.5}}{0.001p^{1.2} \cdot q^{-2}}\right)^{-\frac{5}{3}}$

№7

а) $(x^{1/2}-y^{1/2})\,x^{1/2}y^{1/2}$; б) $(x^{1/2}-y^{1/2})(x^{1/2}+y^{1/2})$;
в) $(5a^{2/3}+2y^{3/2})(5a^{2/3}-2y^{3/2})$.

№8

а) $(x^{1/2}-y^{1/2})^2$; б) $(x^{2/3}+y^{2/3})^2$; в) $(3a^{-7/4}+2a^{3/4})^2$.

№9

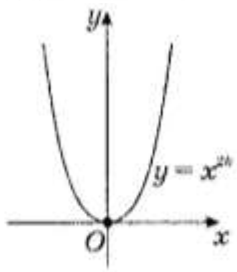
а) $(x^{2/3}-y^{2/3})^2$; б) $(x^{1/3}+y^{1/3})^3$; в) $(a^{2/3}-a^{-4/3})^3$.

Сабақ №12. Дәрежелі функция, оның қасиеттері және графигі.
Жоспары:

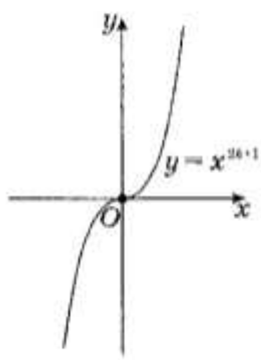
1. **Дәрежелік функцияның негізгі түрі мен қасиеттері**
2. **Дәрежелік функцияның графиктері**

1-*кесте*

Функцияның қасиеттері	$y = x^n,\ n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Анықталу облысы	R	R
Мәндер жиыны	$[0;\ +\infty)$	R
Жұптығы, тақтығы	жұп	тақ
Функцияның нөлдері	$x = 0$	$x = 0$
Өсу аралықтары	$(0;\ +\infty)$	R
Кему аралықтары	$(-\infty;\ 0)$	—
Ең үлкен мәні	—	—
Ең кіші мәні	$f(0) = 0$	—
Таңбатұрақтылық аралықтары	$(0;\ +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$	$(-\infty;\ 0)$ аралығында $f(x) < 0$ $(0;\ +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$



33-сурет



34-сурет

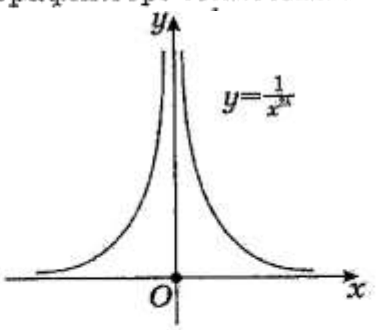
$y = x^n$, $n \in N$ функциясының $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы графиктері сәйкесінше 33- және 34-суреттерде көрсетілген.

2. Егер r — бүтін теріс сан болса ($r = -n$, мұндағы n — натурал сан), онда $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ — *бүтін теріс көрсеткішті дәрежелік функцияны* аламыз.

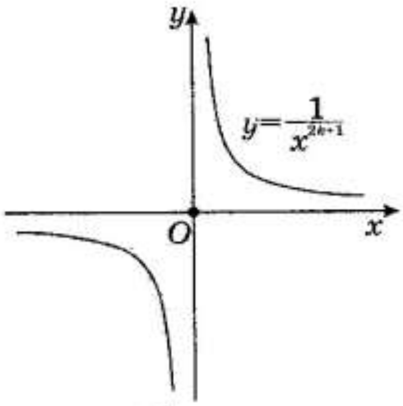
2-кесте

Функцияның қасиеттері	$y = x^{-n},\ n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Анықталу облысы	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$
Мәндер жиыны	$(0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$
Жұптығы, тақтығы	жұп	тақ
Функцияның нөлдері	—	—
Өсу аралықтары	$(-\infty;\ 0)$	—
Кему аралықтары	$(0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$
Ең үлкен мәні	—	—
Ең кіші мәні	—	—
Таңбатұрақтылық аралықтары	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$	$(-\infty;\ 0)$ аралығында $f(x) < 0$ $(0;\ +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$

$y = x^{-n}$, $n \in N$ функциясының $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы графиктері сәйкесінше 37- және 38-суреттерде көрсетілген.



37-сурет

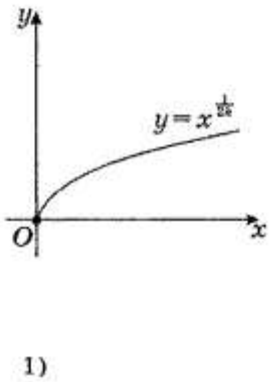


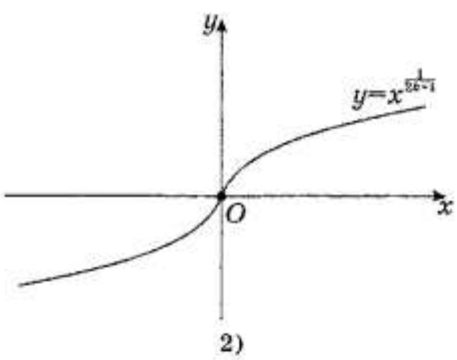
38-сурет

3. Егер $r = \frac{1}{n}$ (мұндағы n — бірден үлкен натурал сан) ($n > 1$) болса, онда бөлшек көрсеткішті $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ дәрежелік функциясын аламыз.

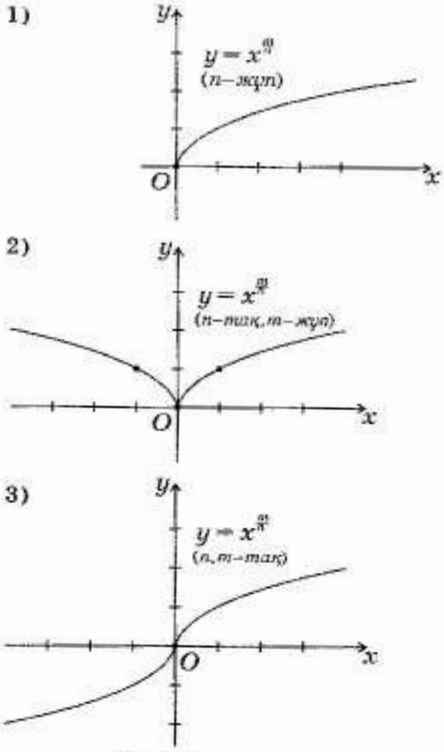
Функцияның қасиеттері	$y = x^{\frac{1}{n}}$, $n > 1$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Анықталу облысы	$[0; +\infty)$	R
Мәндер жиыны	$[0; +\infty)$	R
Жұптығы, тақтығы	жұп емес, тақ емес	жұп емес
Функцияның нөлдері	$x = 0$	$x = 0$
Өсу аралықтары	$(0; +\infty)$	R
Кему аралықтары	—	—
Ең үлкен мәні	—	—
Ең кіші мәні	$f(0) = 0$	—
Таңбатұрақтылық аралықтары	$(0; +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ аралығында $f(x) < 0$ $(0; +\infty)$ аралығында $f(x) > 0$

$y = x^{\frac{1}{n}}$, $n > 1$ функциясының $n = 2k$ және $n = 2k + 1$ болғандағы графиктері сәйкесінше 40.1 және 40.2-суреттерде көрсетілген.





40-сурет

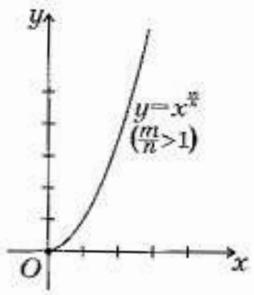


41-сурет

4. Егер $r = \frac{m}{n}$ (мұндағы n, m — өзара жай натурал сандар) және $m < n$ болса, онда *оң бөлшек көрсеткішті* $y = x^{\frac{m}{n}}$ *дәрежелік функцияны* аламыз.

Бұл функцияның графигі n, m мәндерінің жұп немесе тақ болуына байланысты болғандықтан, мына үш жағдайды қарастырайық: 1) n — жұп, m — тақ; 2) n — тақ, m — жұп; 3) n, m — тақ сандар. Осы әрбір жағдай үшін функция графигінің жалпы түрі сәйкесінше 41. 1-, 2-, 3-суреттерде кескінделген.

5. $r = \frac{m}{n}$ (мұндағы n, m — өзара жай натурал сандар) және $\frac{m}{n} > 1$ жағдайында оң бөлшек көрсеткішті $y = x^{\frac{m}{n}}$ дәрежелік функциясын аламыз. Бұл функцияның графигі 42-суретте берілген.

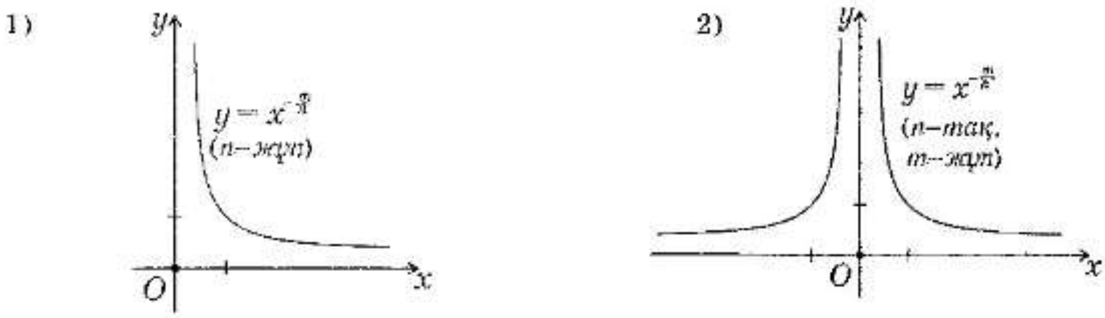


42-сурет

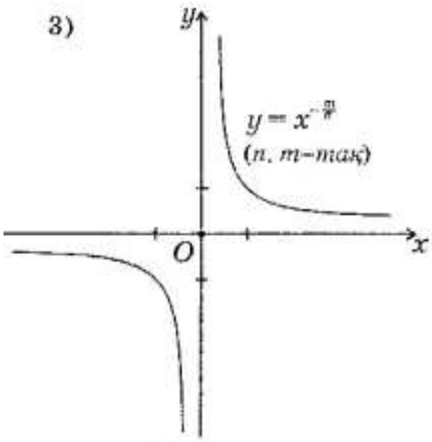
6. Егер $r = -\frac{m}{n}$, мұндағы n, m өзара жай натурал сандар болса, онда теріс бөлшек көрсеткішті $y = x^{-\frac{m}{n}}$ дәрежелік функциясын аламыз.

$y = x^{-\frac{m}{n}}$ функциясы графигінің түрі n, m мәндерінің жұп және тақ болуына байланысты болғандықтан, 3-пункттегі сияқты мұнда да үш жағдай қарастырылады.

$y = x^{-\frac{m}{n}}$ функциясы графигінің жалпы түрі әрбір жағдай үшін сәйкесінше 43. 1-, 2-, 3-суреттерде көрсетілген.



3)



43-сурет

Сабақ № 13. Көрсеткіштік функция, оның қасиеттері және графигі.
Жоспары:
1. **Көрсеткіштік функцияның анықтамасы**
2. **Көрсеткіштік функцияның қасиеттері**
3. **Оның графигі**

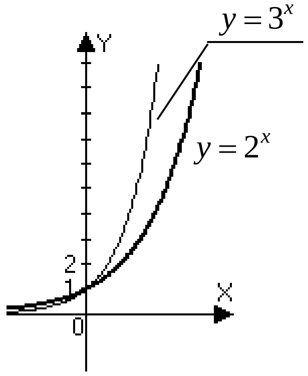
Бақылау сұрақтары:
1. Қандай функция көрсеткіштік деп аталады?
2. 2. Көрсеткіштік функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны дегеніміз не?
3. 3. $y = a^x$ функциясының $a \rangle 1$ болғандағы қасиеттерін атап өтіңдер.
4. 4. $y = a^x$ функциясының $0 \langle a \langle 1$ болғандағы қасиеттерін атап өтіңдер.
5. 5. Келесі функциялардың графиктерін құрыңдар : а) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ және $y = 1{,}5^x$; б) $y = 0{,}75^x$ и $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. Олар өзара қалай орналасады?

Анықтама. $y = a^x$, мұндағы $a \neq 1$ және $a > 0$ түріндегі функция көрсеткіштік функция деп аталады.
Мынадай функцияларды қарастырайық.

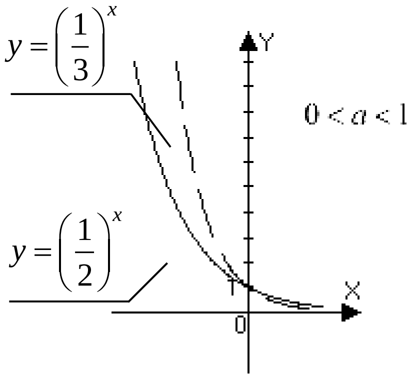
$y = 2^x$; $y = 3^x$ $(a > 1)$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $(a < 1)$

Бұлардың графиктерін құрып, қасиеттерін графиктері бойынша оқып көрейік.



$a>1$



Қасиеттері:

1. Анықталу облысы: $x\in(-\infty;+\infty)$
2. Мәндер жиыны: $y\in(0;+\infty)$
3. x=0 болғанда y=1.

Бұл қасиеттер көрсеткіштік функцияның жалпы қасиеттері деп аталады да, негізіне тәуелді болмайды.

$\underline{a>1}$

4. Функция өспелі
5. x<0 болғанда y<1
6. x>0 болғанда y>1
7. $x\to\infty,\quad y\to\infty$

Көрсеткіші үлкен болатын дәреже үлкен болады

$a<1$

4. Функция кемімелі
5. x<0 болғанда y>1
6. x>0 болғанда y<1
7. $x\to\infty,\quad y\to 0$

Көрсеткіші үлкен болатын дәреже кіші болады

Есеп шығарту:

№91

1) $8^{\frac{1}{3}}$ 2) $16^{\frac{3}{4}}$ 3) $64^{-\frac{1}{2}}$ 4) $0,25^{-\frac{1}{2}}$ 5) $0,36^{\frac{1}{2}}$ 6) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$ 7) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 8) $32^{-\frac{1}{5}}$

№93,№94,№96,№97 (қосымша)

№180

Функцияның анықталу облысын табыңдар:

1) $F(x)=4^{1/x}$
2) $F(x)=(1/3)^{\sqrt{x}}$
3) $F(x)=1/7^{x}$
4) $F(x)=0.35^{x}$

№183

Берілген көрсеткіштік функциялардың қайсысы өспелі, қайсысы кемімелі болады:

1) $Y=4^x$
2) $Y=10^x$
3) $Y=(1/4)^x$
4) $Y=(\sqrt{2})^x$

№186

Салыстырыңдар:

1) $(3,5)^{-\sqrt{2}}$ және $(1/3,5)^{-\sqrt{2}}$
2) $(3/4)^{1+\sqrt{3}}$ және $(3/4)^2$
3) $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ және $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-2}$
4) $(1/\sqrt{3})^{-2\sqrt{3}}$ және $3^{\sqrt{3}}$

Сабақ № 14. Көрсеткіштік теңдеулер және теңсіздіктерді шешу.
Жоспары:

1. **Көрсеткіштік теңдеу ұғымы, оның анықтамасы**
2. **Көрсеткіштік теңдеуді шешу жолдары**

<u>Анықтама:</u> Дәреже көрсеткішінде айнымалы берілетін теңдеулер көрсеткіштік теңдеулер деп аталады.

Мысалы: $2^{2x-1}-4=2^x$; $5^{\sqrt{x}}=1$.

Оларды шешудің негізгі жолдарын қарастырайық:

1. $2^{3x-8}=64$, $64=8\cdot 8=2^3\cdot 2^3=2^6$, онда $2^{3x-8}=2^6$, бұдан $3x-8=6;\ \Rightarrow\ 3x=14\ \Rightarrow\ x=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$

Жауабы: $4\frac{2}{3}$

2. $0{,}1^{2x}\cdot 10^{3x-2}=100$ Сол жағы $0{,}1=10^{-1}$, онда $\left(10^{-1}\right)^{2x}\cdot 10^{3x-2}=10^2$,бұдан $10^{-2x+3x-2}=10^{-2}\ \Rightarrow\ -2x+3x-2=-2\ \ x=0$, теңдеудің шешімі.

Жауабы: $x=0$.

3. $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x-2}=1$

$3^{2x}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{2x}\cdot 3^{-2}=1$. Сол жағындағы ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарайық:

$3^{2x}\left(1-2\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{-2}\right)=1;\quad 3^{2x}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}\right)=1;\quad 3^{2x}\cdot\frac{9-6-2}{9}=1$

$3^{2x}\cdot\frac{1}{9}=1 \qquad 3^{2x}=9 \qquad 3^{2x}=3^2$

$2x=2 \qquad x=1$

Жауабы: $x=1$.

Бұл әдіс ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару әдісі деп аталады.

4. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0$ $4^{2x}=\left(4^x\right)^2$, онда $2\cdot\left(4^x\right)^2-17\cdot 4^x+8=0$. $4^x=t$ деп, квадрат теңдуді шешеміз: $2\cdot t^2-17t+8=0$

$Д=17^2-4\cdot 8\cdot 2=289-64=225$

$t_{1,2}=\frac{17\pm 15}{4};\quad t_1=8;\quad t_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

t орнына $4^x=t$ деп алып,

$4^x=8\ \Rightarrow\ 2^{2x}=2^3;\quad 2x=3;\quad x=\frac{3}{2}=1{,}5$

$4^x=\frac{1}{2};\quad 2^{2x}=2^{-1};\quad 2x=-1;\quad x=-\frac{1}{2}$

Жауабы: $x=1{,}5;\quad x=-0{,}5$.

1.4. $\sqrt{3^x}=\frac{1}{\sqrt{27}}$; «3» негізге келтіріп алайық.

$3^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$

$3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{x}{2}=-\frac{3}{2}$

Жауабы: $x=-3$

5. $2^x \cdot 5^x = 1000$; $10^x = 10^3$; $x = 3$. Жауабы: $x = 3$

6.

$4 + 2^x = 2^{2x-1}$ $4 + 2^x = 2^{2x} \cdot 2^{-1}$ $2^{2x} \cdot \frac{1}{2} - 2^x - 4 = 0$

$\left(2^x\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 2^x - 4 = 0$

$2^x = t$, бұдан $\frac{1}{2}t^2 - t - 4 = 0$

$t^2 - 2t - 8 = 0$ $Д = 4 + 4 \cdot 8 = 36$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2}$; $t_1 = 4$ $t_2 = -2$

$2^x = 4$; $2^x = 2^2$; $\underline{x = 2}$ $2^x = -2$ – шешімі жоқ, себебі $2^x > 0$

Жауабы: $x = 2$

7.

$9^{x-1} + 3^{x+2} = 90$ $9^x \cdot 9^{-1} + 3^x \cdot 3^2 = 90$ $\left(3^x\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + 3^x \cdot 9 = 90$

$3^x = t$

$\frac{1}{9}t^2 + 9t - 90 = 0$ $t^2 + 81t - 810 = 0$ $Д = 81^2 + 4 \cdot 810 = 9801$

$t_{1,2} = \frac{-81 \pm 99}{2}$; $t_1 = \frac{-81 + 99}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$t_2 = \frac{-81 - 99}{2} = \frac{-180}{2} = -90$ $3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$

$3^x \neq -90$, $3^x > 0$ шешімі жоқ. Жауабы: $x = 2$

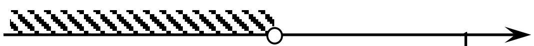
Сабақ № 15. Көрсеткіштік теңдеулер және теңсіздіктерді шешу.
Жоспары:

1. **Көрсеткіштік теңсіздік ұғымы, оның анықтамасы**
2. **Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу жолдары**

Анықтама. Дәреже көрсеткіші айнымалы болатын теңсіздіктер **көрсеткіштік теңсіздіктер** деп аталады.

Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешуде көрсеткіштік функция қасиеттері мен дәреже қасиеттерін қолданады.

Мысал: а) $5^{x-1} > \left(\frac{1}{25}\right)^{4-x}$



Теңсіздіктің екі жағын да бірдей негізге келтіру 7 ек. $\frac{1}{25} = 5^{-2}$ деп,

$5^{x-1} > \left(5^{-2}\right)^{4-x} \Rightarrow 5^{x-1} > 5^{-2(4-x)}$, себебі $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ (дәреже қасиеті). Негізі $5 > 1 \Rightarrow$ функция өспелі, сондықтан $x - 1 > -2(4 - x)$.

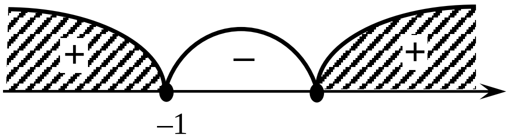
Бірінші дәрежелі теңсіздікті шешеміз.

$x-1>-8+2x$

$x-2x>-8+1$

$-x>-7$

$x<7$ $\qquad x\in(-\infty;7)$



б) $0,7^{x^2-1}\le 1$.

$a^0=1$, $\qquad 0,7^0$, $0,7^{x^2-1}\le 0,7^0$, себебі 0,7 < 1,

$x^2-1\ge 0$, $\quad (x-1)(x+1)\ge 0$ $\qquad x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$

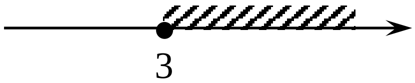
в) $3^{x+1}-3^x\le 54$

$3^x\cdot 3^1-3^x\le 54$;

$3^x(3-1)\le 54 \Rightarrow 3^x\cdot 2\le 54 \Rightarrow 3^x\le 27 \Rightarrow 3^x\le 3^3$,

т.к. 3 > 1, то $x\le 3$

$x\in[3;+\infty)$



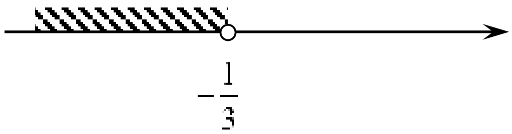
Есеп шығарту:

1.

$\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>4,5^{x-2}$, $\quad 4,5=\frac{9}{2}$,

Онда

$\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>\left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}$; $\qquad \left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>\left(\frac{2}{9}\right)^{-x+2}$



о < $\frac{2}{9}<1$, онда

$2x+3<-x+2$

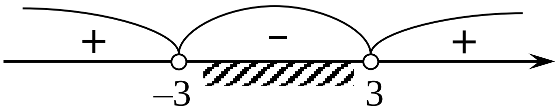
$3x<-1$

$x<-\frac{1}{3}$ $\qquad x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$

2.

$9^{0,5x^2-3}<27$, $\quad 3^{2(0,5x^2-3)}<3^3$, $\qquad$ 3 > 1болғандықтан,

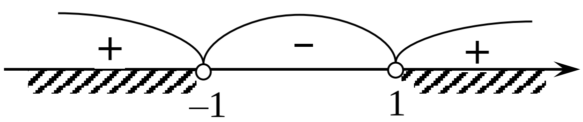
$2(0,5x^2-3)<3$



$x^2-6<3$

$x^2-9<0$

$(x-3)(x+3)<0$ $\qquad x\in(-3;3)$



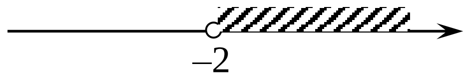
3. $\qquad 2^{\frac{x-1}{x+1}}>1$

$2^{\frac{x-1}{x+1}}>2^0$, 2 > 1 болғандықтан, $\quad \frac{x-1}{x+1}>0$ $\qquad x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

4. $\qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{49}{6}\right)^{x-1}>\frac{4}{49}$. Дәреже қасиетін қолдану керек: $a^n\cdot b^n=(ab)^n$, то $\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{49}{6}\right)^x>\frac{4}{49}$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \frac{4}{49}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{7}\right)^2 \quad , \qquad \frac{7}{2} > 1 \text{ болғандықтан}$$

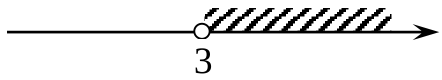


$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$$

$$x > -2 \qquad\qquad x \in (-2; +\infty)$$

5.

$$0,3^{3x-7} < \left(\frac{100}{9}\right)^{-1}$$



$$0,3^{3x-7} < \left(\frac{10}{3}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{3x-7} < \left(\frac{3}{10}\right)^2 \quad \text{, т.к. } \frac{3}{10} < 1 \text{, то}$$

$$3x - 7 > 2$$

$$3x > 9 \qquad x \in (3; +\infty)$$

$$x > 3$$

6. $3^{4x-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$

Көрсеткіштік теңсіздік. Теңсіздіктің екі жағын да бірдей негізге келтірейік.

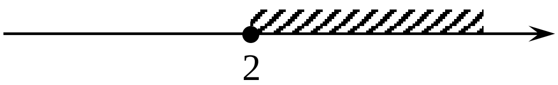
$$3^{4x-1} \cdot \left(3^{-2}\right)^x \geq 3^3$$

$$3^{4x-1} \cdot 3^{-2x} \geq 3^3$$

$3^{4x-1-2x} \geq 3^3$, т.к. 3 > 1, функция өспелі, онда

$4x - 1 - 2x \geq 3$

$2x \geq 4$



$x \in [2; +\infty)$

$x \geq 2$

Жауабы: $x \in [2; +\infty)$

Сабақ № 16. Логарифмдер. Ондық және натурал логарифмдер
Жоспары:

1. **Логарифм ұғымы, логарифм анықтамасы**
2. **Логарифмнің негізгі қасиеттері**
3. **Өрнектерді логарифмдеу және потенцирлеу**
4. **Логарифм ұғымына байланысты есептер**

Біз $a^n = b$ға тең деп айтамыз, ал егер де n – белгісіз болса ше? $2^x = 14$ теңдігінен дәреже көрсеткішін қалай табуға болады? Бізге белгілі амалдар бұл жағдайда көмектеспейді. Сондықтан жаңа ұғым- **логарифм** енгізіледі.

<u>Анықтама</u>: b саны шығу үшін **a** негізі шығарылатын **c** дәреже көрсеткішін **b** санының **a** негізі бойынша л**огаримфмі** деп атайды:

$\log_a b = c; \quad a > 0$ негізі **a** болатын **b** санының логарифмі **c**-ға тең деп оқылады.

анықтама бойынша $a^c = b$,

сонда $a^{\log_a b} = b$ – негізгі логарифмдік тепе- теңдік.

$5^{\log_5 2}=2; \qquad 0,2^{\log_{0,2} 3}=3$.

Логарифмдердің қасиеттері:

1. Теріс сандардың логарифмдері болмайды.

2. Бірдің логарифмі нолге тең, $\log_a 1=0$, себебі $a^0=1$.

3. Негізінің логарифмі 1- ге тең, яғни $\log_a a=1$, т.к. $a^1=a$

4. Көбейтіндінің логарифмі логарифмдердің қосындысына тең: $\log_a\left(N_1\cdot N_2\right)=\log_a N_1+\log_a N_2$

Дәлелдеуі:

$\log_a N_1=n_1$ и $\log_a N_2=n_2$ болсын; анықтама бойынша $N_1=a^{n_1}$ и $N_2=a^{n_2}$

$N_1\cdot N_2=a^{n_1}\cdot a^{n_2}=a^{n_1+n_2}$; бұдан $n_1+n_2=\log_a\left(N_1\cdot N_2\right)$, сонда $\log_a\left(N_1\cdot N_2\right)=\log_a N_1+\log_a N_2$, д.к.о.!

5. $\log_a \dfrac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$

6. $\log_a N^m=m\cdot\log_a N$

7. $\log_{10} b=\lg b$ -ондық логарифм

8. $\log_e b=\ln b$ - натурал логарифм, $e\approx 2,718$ -Непер саны.

Ондық және натурал логарифмдерді МК көмегімен табуға болады.

$\lg 17,4=1,2405 \qquad \ln 0,384=-0,9571$

17,4 $\boxed{\log}$ $\qquad$ 0,384 $\boxed{\ln}$

$\boxed{\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ -бір негізден екінші негізге көшу формуласы.

Есепте: $\log_{1,24} 618,7=\dfrac{\lg 618,7}{\lg 1,24}=29,88 \qquad \log_{1,24} 618,7=\dfrac{\ln 618,7}{\ln 1,24}=29,88$

Тексеру керек: $\log_{1,2} 0,784=-1,3347 \quad \log_{0,34} 11,78$

Ескертулер: 1) $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$ 2) $\boxed{\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b}$ 3) $\boxed{\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}}$

Логарифм арқылы айнымалыны табуға болады:

$\log_{\sqrt{3}} x=-2$ логарифм анықтамасы бойынша $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}=x \Rightarrow x=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

$\log_x \dfrac{1}{27}=-3$ логарифм анықтамасы бойынша $x^{-3}=\dfrac{1}{27} \Rightarrow \dfrac{1}{x^3}=\dfrac{1}{27}; \quad x^3=27; \quad x=3$

$\log_{\sqrt[3]{2}} 64=x$, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x=64 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}x}=64 \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}x}=2^6; \quad \dfrac{1}{3}x=6; \quad x=18$

1. Өрнектерді логарифмдеу.

<u>Анықтама:</u> Санның логарфмін табу амалы **логарифмдеу** деп аталады.

Мысал. Жалпы түрде сан берілсін:

$$x=\frac{a^3\cdot b^2\cdot\sqrt[5]{(a+b)^2}}{(a-b)^4\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

Х санының логарифмін табайық: Негізі кез келген сан болғандықтан оны жазбай тұрайық:

$$\log x=\log\left(a^3\cdot b^2\sqrt[5]{(a+b)^2}\right)-\log\left((a-b)^4\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)=\log a^3+\log b^2+\log\sqrt[5]{(a+b)^2}-\log(a-b)^4-$$

$$-\log\sqrt{a^2+b^2}=3\log a+2\log b+\frac{2}{5}\log(a+b)-4\log(a-b)-\frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)$$

2. **Өрнектерді потенцирлеу.**

<u>Анықтама:</u> Логарифмі бойынша санды табу **потенцирлеу** деп аталады.
Потенцирлеу – логарифмдеуге кері амал.

Мысал. $\log x = \frac{2}{5}\log(a+b) - 2\log a - \frac{1}{2}\log b$

Сонда $x = \frac{(a+b)^{\frac{2}{5}}}{a^2 \cdot b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[5]{(a+b)^2}}{a^2 \cdot \sqrt{b}}$;

№228 1;9;81;243;1/3;1/27 сандарының негізі 3 болатын логарифмін табыңдар.

Есептеңдер:
№229
1) $\log_2 16$
2) $\log_{0,2} 0{,}04$
3) $\log_3 \frac{1}{81}$
4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$
5) $\log_{23} 1$
6) $\log_5 \frac{1}{25}$

№230
1) $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$
2) $\log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$
3) $\log_3 8 - \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{2}$
4) $\log_7 64 - \log_7 256 + \log_7 28$

№231
Келесі көрсеткіштік теңдіктерді логарифм арқылы жазыңдар:
1) $3^6 = 729$
2) $4^5 = 1024$
3) $10^4 = 10000$
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
6) $10^{-3} = 0{,}001$

№237,№240,№241,№247 (жұптары)
Үйге: тақ сандары

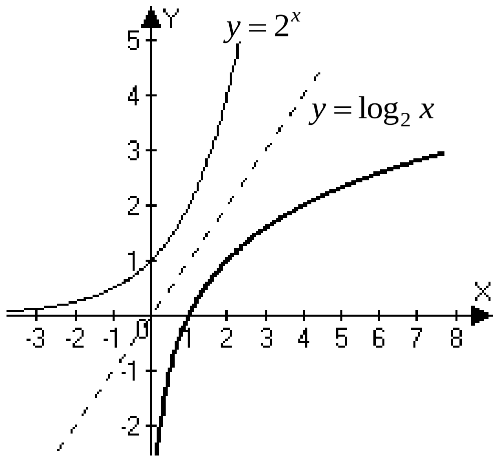
Сабақ № 17. Логарифмдік функция,оның қасиеттері мен графигІ

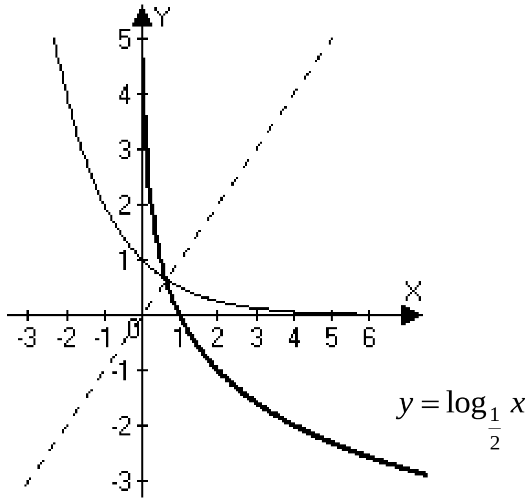
Жоспары:
1. **Логарифмдік функция ұғымы**
2. **Логарифмдік функцияның графигі мен қасиеттері**
3. **Логарифмдерді салыстыру**

Көрсеткіштік функцияға кері функция логарифмдік функция деп аталады: $y = a^x$, $a \neq 1$ және $a > 0$ – көрсеткіштік функция $x = \log_a y$, x пен y-ті орындарымен ауыстырсақ, $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$ аламыз. Бұл– логарифмдік функция.

Кері функцияның графигі I және III ширектердегі биссектрисаларға қарағанда симметриялы болатынын білеміз. Осы қасиетті қолданып, көрсеткіштік функция мен логарифмдік функцияның графиктерін a > 1 және a < 1 болғанда сызайық.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$





Логарифмдік функцияның қасиеттерін жазып шығайық:

1. $D(y)$: $x \in (0;+\infty)$
2. $E(y)$: $y \in (-\infty;+\infty)$
2. $x = 1 \quad y = 0$

(1 – 3) қасиеттері жалпы болып табылады да, негізіне тәуелді болмайды.
Келесі қасиеттер негізіне қатысты қарастырылады:

a > 1	0 < a < 1
3. Функция монотонды өспелі	4. Функция монотоннды кемімелі
4. $0 < x < 1 \quad y < 0$	5. $0 < x < 1 \quad y > 0$
$x > 1 \quad y > 0$	$x > 1 \quad y < 0$
5. $x \to \infty$ болғанда $y \to \infty$	6. $x \to \infty$ болғанда $y \to -\infty$
Үлкен санға үлкен логарифм сәйкес келеді.	Үлкен санға кіші логарифм сәйкес келеді.

Логарифмдік функцияның қасиеттерін қолданып, санның таңбасын анықтаңдар:

1. $\log_2 3$
2. $\log_{1,4} 0,72$
3. $\log_{0,34} 14,7$
4. $\log_{0,29} 0,786$

Жауаптары:

1. > 0
2. < 0
3. < 0
4. > 0

Өз беттерімен:

$\log_{2,3} 61,2$ $\quad\quad$ $\log_{0,34} 18,6$

$\log_{1,94} 0,786$ $\quad\quad$ $\log_{0,92} 0,0038$

Сабақ № 18. Логарифмдік теңдеулер және теңсіздіктерді шешу.
Жоспары:

1. **Логарифмдік теңдеу анықтамасы**
2. **Логарифмдік теңдеудің түрлері және оларды шешу жолдары**

Анықтама: Логарифм астында айынмалы берілетін теңдеулер логарифмдік теңдеулер деп аталады. Оларды шешудің жолдарын қарастырайық.

1. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+6\right) = -2$

Логарифм анықтамасы бойынша:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = x^2 + 6$$

$x^2 + 6 = 16$

$x^2 + 6 - 16 = 0$

$x^2 - 10 = 0$

$x = \pm\sqrt{10}$ теріс сандардың логарифмдері болмайтынын ескеру керек. $x^2 + 6 > 0$ әрқашан да оң болатындықтан, $x = \pm\sqrt{10}$ теңдеу түбірлері болады. Жауабы: $\pm\sqrt{10}$

2. Логарифмдік теңдеуді шешу керек:

$\log_5\left(6 - 5^x\right) = 1 - x$; бұдан $5^{1-x} = 6 - 5^x$

Көрсеткіштік теңдеуді алдық. $5 \cdot 5^{-x} = 6 - 5^x$, $\frac{5}{5^x} = 6 - 5^x$

$5^x \neq 0 \;\Rightarrow\; 5 = \left(6 - 5^x\right) \cdot 5^x \quad 5 = 6 \cdot 5^x - \left(5^x\right)^2$

$5^x = t$ деп алып, $5 = 6t - t^2; \quad t^2 - 6t + 5 = 0$, $D = 36 - 20 = 16$, $t_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 5; \quad t_2 = 1$, онда

$5^x = 5 \;\Rightarrow\; x = 1; \quad 5^x = 1; \quad 5^x = 5^0; \quad x = 0$. Жауабы: $x = 1 \quad x = 0$

3. $\lg\left(3x - 2\right) + \lg 2 = 2 - \lg\left(x + 1\right)$

2- ні $2 = \lg 100$ деп жазып алайық. $\lg\left(3x - 2\right) + \lg 2 = \lg 100 - \lg\left(x + 1\right)$. Логарифм қасиеттерін қолданайық:

$$\lg\left(\left(3x - 2\right) \cdot 2\right) = \lg\frac{100}{x + 1}$$

$$2\left(3x - 2\right) = \frac{100}{x + 1}; \qquad x \neq -1$$

$2\left(3x - 2\right)\left(x + 1\right) = 100$

$\left(3x - 2\right)\left(x + 1\right) = 50$

$3x^2 - 2x + 3x - 2 = 50$

$3x^2 + x - 52 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 52 = 625$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 25}{6}; \; x_1 = 4; \; x_2 = -\frac{26}{6} = -\frac{13}{3}$$

Алынған түбірлерді тексеру керек.

Тексеру:

$x = 4$

$\lg 10 + \lg 2 = \lg 100 - \lg 5$

$$10 \cdot 2 = \frac{100}{5}$$

$20 = 20$ дұрыс.

$x = -\frac{13}{3}$ – түбірі болмайды. Жауабы: $x = 4$.

Ең негізгісі x- тің барлық мүмкін мәндерін табу керек:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 2 \\ x > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > -1 \end{cases} \;\Rightarrow\; x > \frac{2}{3} \quad x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

4. Потенцирлеуді қолдануға болады.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+2=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

$$2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left((2x-3)\cdot\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^{-1}$$

$$\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{1}{x+2}, \qquad x\neq-2$$

$$\frac{1}{4}(2x-3)(x+2)=1 \qquad\qquad (2x-3)(x+2)=4$$

$$2x^2-3x+4x-6-4=0 \qquad\qquad 2x^2+x-10=0$$

$$D=1+80=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm9}{4}; \quad x_1=2; \; x_2=-2,5$$

Тексеру:

$x=2$

$$\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}4$$

$x=-2,5$ – түбірі болмайды.

$$1\cdot\frac{1}{4}=4^{-1}$$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ дұрыс. Жауабы: $x=2$

1.20. $x^{2\lg x-1,5}=\sqrt{10}$

Теңдеудің екі жағын да логарифмдейік:

$$(2\lg x-1,5)\cdot\lg x=\frac{1}{2}\lg 10$$

$$2\lg^2 x-1,5\lg x=\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$2\lg^2 x-1,5\lg x-\frac{1}{2}=0$$

$$4\lg^2 x-3\lg x-1=0$$

$\lg x$ - ке қатысты квадрат теңдеу аламыз:

$\lg x=t$ деп, $4t^2-3t-1=0$

$$D=9+16=25; \qquad t_{1,2}=\frac{3\pm5}{8}$$

$$t_1=1; \quad t_2=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

Онда $\lg x=1 \;\Rightarrow\; x=10$

Егер $\lg x=-\frac{1}{4}$, онда $x=10^{-\frac{1}{4}}$ $x=10^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$ Жауабы: 10; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

1.25. $2\log_x 25-3\log_{25}x=1$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$ **(жаңа қасиет)**

$2 \cdot \frac{1}{\log_{25} x} - 3\log_{25} x = 1$ ММЖ: $x > 0$ $x \neq 1$

$2 - 3(\log_{25} x)^2 = \log_{25} x$

$3\log_{25}^2 x + \log_{25} x - 2 = 0$

$\log_{25} x = t,$ $3t^2 + t - 2 = 0$

$D = 1 + 24 = 25;$ $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6};$

$t_1 = -1;$ $t_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\log_{25} x = -1$ $x = 25^{-1} = \frac{1}{25};$

$\log_{25} x = \frac{2}{3}$, то $x = 25^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} = 5^{1\frac{1}{3}} = 5\sqrt[3]{5}$

Жауабы: $\frac{1}{25};$ $5\sqrt[3]{5}$

1.54. $\log_2(2-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\sqrt{2}} 3$

Бірдей негізге келтірейік. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, онда

$\log_2(2-x) + \log_{2^{-1}}(x-1) = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3$

$\log_2(2-x) - \log_2(x-1) = 2\log_2 3$

ММЖ:

$\begin{cases} 2 - x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$ $x \in (1;2)$

Логарифм қасиеттерін қолданып:

$\frac{2-x}{x-1} = 3^2$ $x \neq 1$

$2 - x = 9(x-1)$

$2 - x = 9x - 9;$ $2 - x - 9x + 9 = 0$

$-10x = -11;$ $10x = -11$

$x = 1{,}1$

Тексеру:

$x = 1{,}1$

$\log_2 0{,}9 + \log_{\frac{1}{2}} 0{,}1 = \log_{\sqrt{2}} 3$

$\log_2 0{,}9 - \log_2 0{,}1 = 2\log_2 3$

$\frac{0{,}9}{0{,}1} = 9$

$9 = 9$ дұрыс. Жауабы: $x = 1{,}1$

Өз бетінше:

1) $\log_2(2x-6) = 4 - \log_2(x-6)$

$2x - 6 = \frac{16}{x-6}$ $x \neq 6$

$2x^2 - 6x - 12x + 36 = 16$

$2x^2 - 18x + 20 = 0$

$x^2 - 9x + 10 = 0$ $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{2};$ $x_1 = 1{,}3;$ $x_2 = 7{,}7$

ММЖ:

$\begin{cases} 2x - 6 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x > 6 \end{cases}$

$x \in (6; +\infty)$

$x = 1{,}3$ $x = 7{,}7$

Тексеру:

$x = 7{,}7$

$\log_2 9{,}4 = \log_2 16 - \log_2 1{,}7$

$9{,}4 = \frac{16}{1{,}7}$

$9{,}4 = 9{,}4$ дұрыс. Жауабы: $x = 7{,}7$

2) $\log_4 x + \log_x 4 = 2{,}5$

$$\log_4 x+\frac{1}{\log_4 x}=2,5 \qquad \log_4 x=y \quad \Rightarrow \quad y^2-2,5y+1=0$$

$$D=6,25-4=2,25$$

$$\log_4^2 x-2,5\log_4 x+1=0$$

$$y_{1,2}=\frac{2,5\pm1,5}{2}; \qquad y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$$

$$\log_4 x=2 \qquad \log_4 x=\frac{1}{2}$$

$$\underline{x=16} \qquad x=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

$$\underline{x=2}$$

3) $\left(\log_3 x\right)^2+4\log_{\frac{1}{3}} x+3=0$

$$\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$$

$\log_3 x=t;\quad t^2-4t+3=0 \qquad \log_3 x=3 \qquad \log_3 x=1 \qquad$ Жауабы: $x=27;\ x=3$

$t_1=3;\quad t_2=1 \qquad \underline{x=27} \qquad \underline{x=3}$

4) $x^{\lg x}=10$

$\lg x\cdot\lg x=\lg 10$

$\lg^2 x=1$

$\lg x=\pm1; \qquad \lg x=1; \qquad \lg x=-1$

$x=10 \qquad x=10^{-1}=0,1$

Жауабы: $10;\ \ 0,1$.

Сабақ № 19. Логарифмдік теңдеулер және теңсіздіктерді шешу.
Жоспары:

1. **Логарифмдік теңсіздік анықтамасы**
2. **Логармфдік теңсіздіктің түрлері**
3. **Оларды шешу жолдары**

Бақылау сұрақтары:

1. Логарифмдік және көрсеткіштік теңдеулер дегеніміз не?
2. Көрсеткіштік теңдеулерді шешудің негізгі жолдары?
3. Логарифмдік теңдеулерді шешудің негізгі жолдары?
4. Көрсеткіштік функциялардың анықталу облысы?
5. Логарифмдік функциялардың анықталу облысы?

$\log_a f(x)>\log_a g(x)$, $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ теңсіздіктерін шешу негізі а-ның мәніне байланысты мынадай теңсіздіктер жүйесін шешуге әкеледі.

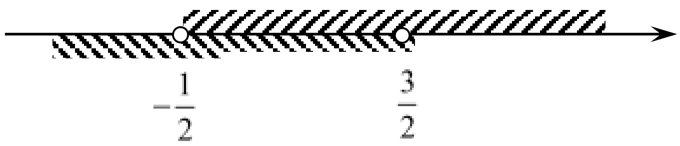
1) $\begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0<x<1 \\ f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$

1) $\log_{\frac{1}{4}}\left(3-2x\right)>-1$, себебі $-1=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}} 4\ >0$

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(3-2x\right)>\log_{\frac{1}{4}} 4$$

$\frac{1}{4}<1$екенін ескере отырып, мынаны аламыз:

$$\begin{cases}3-2x<4\\3-2x>0\end{cases}\quad\begin{cases}-2x<4-3\\-2x>-3\end{cases}\quad\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

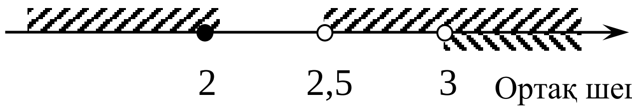


Жауабы: $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

2) $\log_3(2x-5)\le\log_3(x-3)$

Негіздері бірдей және 3 > 1, демек

$$\begin{cases}2x-5\le x-3\\2x-5>0\\x-3>0\end{cases}\quad\begin{cases}x\le 2\\x>2{,}5\\x>3\end{cases}$$



Ортақ шешімі жоқ.

Жауабы: теңсіздіктің шешімі жоқ.

<u>Қосымша</u>:

$y=\sqrt{\lg\left(x^2-7x+13\right)}$ функцияның анықталу облысын табу керек:

$Д(y):\lg\left(x^2-7x+13\right)\ge 0$

$\lg\left(x^2-7x+13\right)\ge 1$

$$\begin{cases}x^2-7x+13\ge 1\\x^2-7x+13>0\end{cases}\quad\begin{cases}x^2-7x+12\ge 0\\x^2-7x+13>0\end{cases}$$

Екінші дәрежелі теңсіздіктер жүйесін интервалдар әдісімен шешеміз:

$x^2-7x+12=0$

$D=49-48=1$

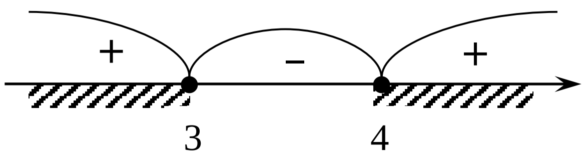
$x_{1,2}=\dfrac{7\pm1}{2}$

$x_1=4\quad x_2=3$

$x^2-7x+13=0$

$D=49-52=-3<0$

Нақты түбірлері жоқ, себебі. a = 1 > 0, онда $x^2-7x+13>0$ $x\in(-\infty;+\infty)$ ылғи, сондықтан жүйенің шешімі бірінші теңсіздікке байланысты.



$x\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$

Жауабы: $x\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$

Есептер шығарту:

1) $\lg x>1$
$\begin{cases}x>0\\x>10\end{cases}\to x\in(10,+\infty)$

2) $\lg x<2$
$\begin{cases}x>0\\x<100\end{cases}\to(0{,}100)$

3) $\log_2 x\le -1$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \le \frac{1}{2} \end{cases} \to \left]0, \frac{1}{2}\right]$$

4) $\log_{0.5} x > 2$
5) $\lg(1 - x) \ge 2$
6) $\ln x^2 < 1$
7) $\log_2(2x - 3) < 3$
8) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5) < -2$

Алгебра және анализ бастмалары: 11 класс
№291, №292,№293
Үй тапсырмасы:
№№292,№293 (2,4)

Сабақ № 20. Есептер шығару.
Жоспары:
1. **Логарфмдік теңдеулер мен теңсіздіктер туралы қайталау сұрақтары**
2. **Логарифмдік теңдеулерге есептер**
3. **Логарфмдік теңсіздіктерге есептер**

Бақылау сұрақтары:
1. Қандай функция көрсеткіштік деп аталады?
2. Көрсеткіштік функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны дегеніміз не?
3. $y = a^x$ функциясының $a \rangle 1$ болғандағы қасиеттерін атап өтіңдер.
4. $y = a^x$ функциясының $0 \langle a \langle 1$ болғандағы қасиеттерін атап өтіңдер.
5. Қандай теңсіздік көрсеткіштік деп аталады?
6. Көрсеткіштік функцияның қандай қасиеттері теңсіздік шешуде қолданылады:
7. Негізі бойынша берілген санның логарифміне анықтама беріңдер.
8. Негізгі логарифмдік тепе- теңдікті жаз.
9. Негізі $a \rangle 1$; $0 \langle a \langle 1$ болғанда логарифмінің қасиеттерін беріңдер.
10. Қандай функция логарифмдік деп аталады?
11. Логарифмдік функцияның $a \rangle 1$ және $0 \langle a \langle 1$ болғанда қасиеттерін атаңдар.
12. Функцияның $y = \log_a x$ анықталу облысы мен мәндер жиынын атаңдар ?
13. Көбейтіндінің логарифмі туралы теореманы тұжырымдаңдар.
14. Бөліндінің логарифмі теоремасын айтып шығыңдар.
15. Дәреженің логаримі теоремасын беріңдер.
16. Қандай теңдеулер логарифмді деп аталады?
17. Логарифмдік теңдеудің анықталу облысын теңсіздік түрінде жазыңдар:
18. $\log_a f(x) = \log_b g(x)$.
19. Қандай теңсіздіктер логарифмдік деп аталады?
20. Логарифмдік теңсіздіктерді шешу үшін нені қолдану керек?

Есептерді шығарту:
Теңдеуді шеш:

№1

а) $27 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{27}\right)$;

в) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$;

д) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$.

№2

а) lg(x + 6) – 0,5 lg(2x - 3) = 2- lg25;

б) $\log_2 (x^2 + 4x + 3) = 3$;

в) $\log_5 (x + 1) + \log_5 (2x + 3) = 1$.

№3

Теңсіздікті шешіңдер:

а) $\log_3 (12 - 2x - x^2) \rangle 2$;

б) $\log_4 (x + 1) + \log_4 x \langle \log_4 2$;

в) $\log_{0.5} (2x - 4) \rangle -1$;

г) $\log_5 (x^2 - 4ч - 3) \langle 0$.

№4

1) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 3^{2x} = 675$
2) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 1$
3) $3^{2x+1} + 9 = 3^{x+3} + 3^x$
4) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$
5) $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) - 1 + \log_7(2x-7) = 0$
6) $\log_{\frac{1}{3}}\left(2-5x\right) \geq -2$
7) $\log_2\left(2x+2\right) + \log_2\left(x-5\right) = 7^{\log_7 5}$
8) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt{x} = -1$
9) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$
10) $2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1$

Сабақ №21. Бақылау жұмысы.

І-нұсқа

Теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу керек:

1) $0{,}2^{0{,}27-3x^2} < 1$

2) $4^x + 2^{x+1} - 6 = 0$

3) $7^x - 7^{x-1} = 6$

4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

5) $\log_2 x + \log_4\left(x+2\right) = 2$

6) $\log_{0{,}5}(2x-3) + 2 = -\log_{0{,}5}(x+2)$

7) $\log_2^2 x - 2\log_2 x^2 > -3$

8) $\log_{0{,}25}(x+1) < -0{,}5$

ІІ-нұсқа

Теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу керек:

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} > \sqrt{\frac{2}{3}}$

2) $8^{2x-1} - 8^{x+1} + 30 = 0$

3) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$

4) $5^x+5^{x-1}+5^{x-2}=3^x+3^{x-1}+3^{x-2}$

5) $\lg\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\lg(3x-2)=\lg 80-1$

6) $\log_4 x+\log_x 4=2,5$

6) $3\lg x-\frac{12}{\lg x}=5$

7) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)>\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

8) $\log_{15} x \le 1-\log_{15}(x+5)$

7) $1+2\lg 2=0.5\lg(x+30)+\lg(x-30)^{0.5}$

8) $2\log_4 x+\log_x 4=5$

№3 бөлім бойынша бақылау сұрақтары.

1. Қандай функция көрсеткіштік деп аталады?
2. Көрсеткіштік функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны дегеніміз не?
3. $y = a^x$ функциясының $a \rangle 1$ болғандағы қасиеттерін атап өтіңдер.
4. $y = a^x$ функциясының $0\langle a\langle 1$ болғандағы қасиеттерін атап өтіңдер.
5. Келесі функциялардың графиктерін құрыңдар : а) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ және $y = 1,5^x$; б) $y = 0,75^x$ и $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$. Олар өзара қалай орналасады?
6. Теңдеуді графиктік түрде шешіңдер: а) $2^x = 6$; б) $2^x = 3^x$; в) $02^x = 0,7^x$
7. Қандай теңсіздік көрсеткіштік деп аталады?
8. Көрсеткіштік функцияның қандай қасиеттері теңсіздік шешуде қолданылады: а) $2^x\rangle 2^n$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\langle\left(\frac{1}{3}\right)^n$?
9. Теңдеуді шеш: а) $27=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left(\frac{1}{27}\right)$;
в) $3^{6-x}=3^{3x-2}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; д) $2^x\cdot 5^x=0,1\cdot\left(10^{x-1}\right)^5$.
10. Негізі бойынша берілген санның логарифміне анықтама беріңдер.
11. Негізгі логарифмдік тепе- теңдікті жаз. Оны дәлелде?
12. Негізі $a\rangle 1$; $0\ \langle\ a\ \langle\ 1$ болғанда логарифмнің қасиеттерін беріңдер.
13. Қандай функция логарифмдік деп аталады?
14. Логарифмдік функцияның $a\ \rangle\ 1$ және $0\ \langle\ a\ \langle\ 1$ болғанда қасиеттерін атаңдар. Оларды графикте көрсеткіңдер.
15. Функцияның $y = \log_a x$ анықталу облысы мен мәндер жиынын атаңдар ?
16. Көбейтіндінің логарифмі туралы теореманы дәлелдеңдер.
17. Бөліндінің логарифмі теоремасын айтып шығыңдар.
18. Дәреженің логаримі теоремасын беріңдер.
19. Қандай теңндеулер логарифмді деп аталады?
20. Логарифмдік теңдеудің анықталу облысын теңсіздік түрінде жазыңдар: $\log_a f(x) = \log_b g(x)$.
21. Теңдеуді шеш: а) $\lg(x + 6) – 0,5 \lg(2x - 3) = 2- \lg25$;
б) $\log_2 (x^2 + 4x + 3) = 3$; в) $\log_5 (x + 1) + \log_5 (2x + 3) = 1$.
22. Қандай теңсіздіктер логарифмдік деп аталады?
23. Логарифмдік теңсіздіктерді шешу үшін нені қолдану керек?
24. Теңсіздікті шешіңдер: а) $\log_3 (12 -2x –x^2) \rangle 2$;

б) $\log_4 (x + 1) + \log_4 x \langle \log_4 2$; в) $\log_{0.5} (2x -4) \rangle -1$;
г) $\log_5 (x^2 – 4ч - 3) \langle 0$.

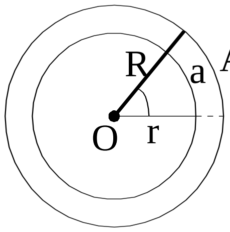
Бөлім IV Тригонометриялық функциялар.

Сабақ № 22. Сан аргументті тригонометриялық функциялар. Тригонометриялық өрнектердің мәнін табу.

Жоспары:

1. **Бұрыш және оны өлшеу бірліктері**
2. **Сүйір бұрыштың синусы, косинусы, тангенсі және котангенсі**

Кез келген бұрыш не градустық (өлшем бірлігі– градус)өлшеуішпен, не радиандық (өлшем бірлігі – радиан) өлшеуішпен өлшенеді.Бір доғалық градус– бұл шеңбердің $\frac{1}{360}$ бөлігі. Бір бұрыштық градус – бұл доғалық бұрышқа тірелген центрлік бұрыш. Бұрыштың радиандық өлшемі–берілген доға ұзындығын оның радиусына қатынасына тең. Радиан –бұл берілген доғаның радиусының ұзындығына тең болатын доғаға тірелетін центрлік бұрыш. Шеңбер 2π радианға тең.



$\frac{\cup A}{R} = \frac{\cup a}{r} ... = const$ – бұрыштың радиандық өлшемі

$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радиан

1 рад $= 57^\circ 17' 45'' \approx 57^\circ 18' \approx 57,3^\circ$

Бұрыштың градустық өлшеуішінен радиандық өлшеуішіне көшу үшін мына формуланы қолдануға болады:

$$\begin{matrix} 360^\circ - 2\pi \\ A^\circ - \alpha \text{ рад} \end{matrix} \Rightarrow A^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \ \alpha = \frac{A^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

Мысал:

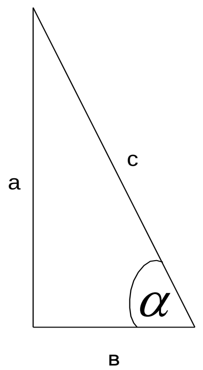
1) Берілгені: $\alpha = 2,1$ $\quad A^\circ = \frac{180^\circ \cdot 2,1}{\pi} =$

Табу керек: $A^\circ - ?$

2) Берілгені: $A^\circ = 17^\circ 20'$ $\quad \alpha = \frac{17^\circ 20' \cdot \pi}{180^\circ} =$

Табу керек: $\alpha - ?$

Тік бұрышты үшбұрышта



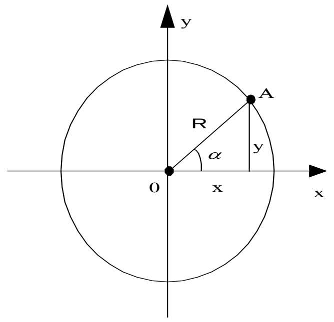
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$tg\alpha = \frac{b}{a}$

$ctg\alpha = \frac{b}{a}$

Кез келген бұрыш үшін

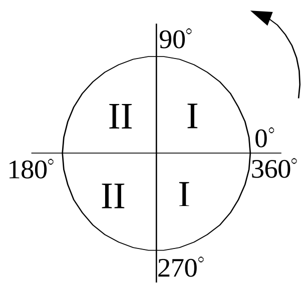


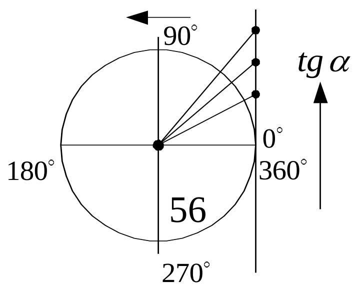
$R = 1; \quad \cos\alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$

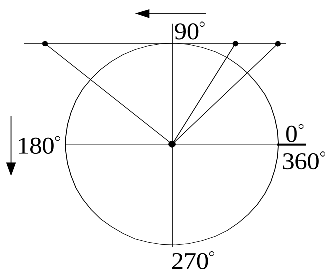
$\sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$

$tg\alpha = \frac{y}{x}; \quad ctg\alpha = \frac{x}{y}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \ \mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$







Негізгі тригонометриялық тепе- теңдік.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$
$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$	$1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}=\mathrm{cosec}\,\alpha$

№1

Мына бұрыштардың радиандық өлшеуіштерін табу керек:

1) $A^0=210^0$
2) $A^0=10^0$
3) $A^0=13^0$
4) $A^0=27^0$
5) $A^0=18^0$
6) $A^0=210^0$
7) $A^0=32^0$
8) $A^0=25^0$
9) $A^0=240^0$
10) $A^0=720^0$

№2

Мына бұрыштардың градустық өлшеуіштерін табу керек:

1) $\alpha=3{,}14$
2) $\alpha=2\pi$
3) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$
4) $\alpha=6\pi$
5) $\alpha=\frac{5\pi}{3}$
6) $\alpha=\frac{7\pi}{9}$
7) $\alpha=\frac{6\pi}{7}$
8) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$
9) $\alpha=\frac{\pi}{5}$
10) $\alpha=\frac{3\pi}{11}$

Сабақ № 23. Сан аргументті тригонометриялық функциялар. Тригонометриялық өрнектердің мәнін табу.

Жоспары:

1. **Тригонометриялық өрнектердің мәнін табу.**
2. **Келтіру формулалары**

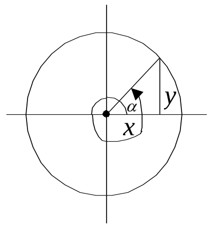
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

$tg\,\alpha$ ылғи өседі $(+)$

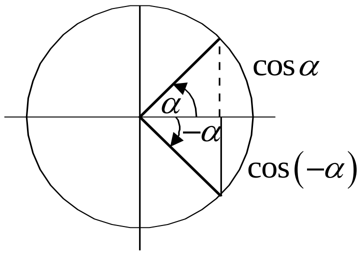
Ширектер

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$tg\,\alpha$	+	–	+	–
$ctg\,\alpha$	+	–	+	–

Есептеу керек: 1) $\dfrac{4-2tg^2 45^\circ + ctg^4 60^\circ}{3\sin^3 90^\circ - 4\cos^2 60^\circ + 4ctg^2 45^\circ}$ (ауызша)



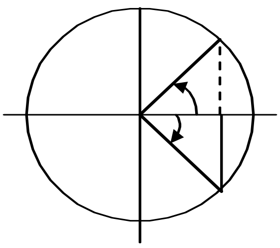
α және $-\alpha$ бұрыштары

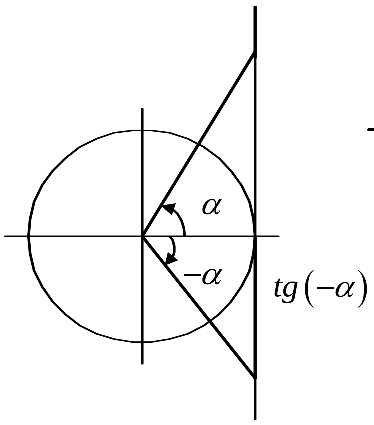


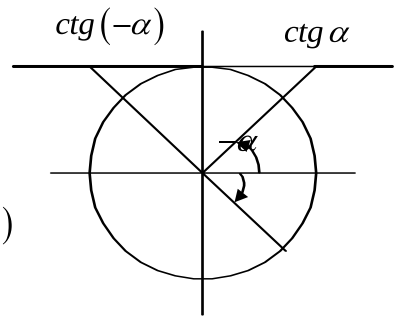
$ctg\,\alpha$ ылғи кемиді $(+)$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (жұп функция) $-\alpha) = -tg\,\alpha$ (тақ) $ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$ (тақ)

Периодтылығы:

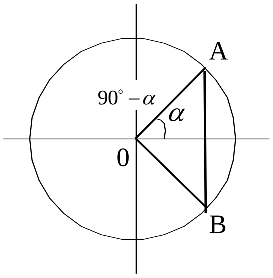




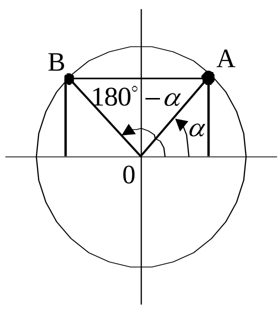


$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha+360^\circ) &= \sin\alpha \\ \cos(\alpha+360^\circ) &= \cos\alpha \end{aligned}\right] T = 360^\circ \text{ – период}$$

$$\left.\begin{aligned} tg(\alpha+180^\circ) &= tg\alpha \\ ctg(\alpha+180^\circ) &= ctg\,\alpha \end{aligned}\right] T = 180^\circ \text{ – период}$$



<u>Келтіру формулалары</u>:



$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\qquad\qquad$ $\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$

1) Нәтиженің таңбасы берілген функцияның таңбасымен ширекке байланысты алынады.
2) Егер сүйір бұрыш горизонтал диаметр бойынша алынса, яғни $\left(180^\circ\pm\alpha\right)$ и $\left(360^\circ\pm\alpha\right)$, онда функция аты өзгермейді; егер вертикал, яғни $\left(90^\circ\pm\alpha\right)$ и $\left(270^\circ\pm\alpha\right)$, онда функция аты керіге ауысады.

Мысалы:

$\sin\left(180^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin\left(270^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\cos\left(90^\circ+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(360^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$

$tg\left(180^\circ-\alpha\right)=-tg\,\alpha$ $\qquad$ $ctg\left(90^\circ+\alpha\right)=-tg\,\alpha$

№3

Ықшамда:

1) $$\frac{\sin\left(180^\circ-\alpha\right)\cdot\cos\left(90^\circ+\alpha\right)}{\cos\left(360^\circ-\alpha\right)\cdot\sin\left(270^\circ-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)}=\frac{-\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$$

2) $$\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3-\left(ctg\,\frac{\pi}{4}\right)^3+\left(\sin 0^\circ\right)^2}{\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2+2\sin\frac{\pi}{6}+2\cos^2\frac{\pi}{4}}$$

Үй тапсырмасына:

Ықшамда:

3) $$\frac{\sin\left(\alpha-\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{ctg\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-tg\left(\pi+\alpha\right)}=\cos\alpha$$

4) $$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=tg\,\alpha$$

Сабақ № 24.

Бір аргументті тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырмасы. Тригонометриялық өрнектерді теңбе- тең түрлендіру

Жоспары:

1. **Бір аргументті тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырмасы**
2. **Тригонометриялық өрнектерді теңбе-тең түрлендіру**

Қайталау сұрақтары:

1. Қандай тригонометриялық функцияларды білесіңдер?
2. Негізгі тригонометриялық тепе- теңдік формулалары?
3. Келтіру формулалары?

4. Үйге берілген тапсырма?

1) Дәлелдеу керек: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=tg(\alpha+\beta)$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos a\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta+2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

($\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$ формулаларын қолдандық)

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)$$

2) Дәлелдеу керек: $\sin2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin8\alpha$

$$\sin2\alpha\cdot\cos^3 2\alpha-\sin^3 2\alpha\cdot\cos2\alpha=\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)=\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\cos4\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sin4\alpha\cdot\cos4\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sin4\alpha\cdot\cos4\alpha=\frac{1}{4}\sin8\alpha$$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha;$ $\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin2\alpha$ формулалары қолданылды.

3) Берілгені: $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\quad 90^\circ<\alpha<180^\circ$

$\cos\beta=-\dfrac{3}{4}\quad 180^\circ<\beta<270^\circ$

Табу керек: $\sin(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha+\beta)$

Шешуі:

Формулаларды жазып алайық:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos\alpha$ және $\sin\beta$ табу керек. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ қолданып, мынаны аламыз

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25};$ $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, т.к. $90^\circ<\alpha<180^\circ$ (II ширек)

Дәл сол сияқты: $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$

$\sin^2\beta=1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16};$ $\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, т.к. $180^\circ<\beta<270^\circ$ (III ширек)

онда:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{9}{20}+\frac{4\sqrt{7}}{20}=-\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{12}{20}+\frac{3\sqrt{7}}{20}=\frac{12+3\sqrt{7}}{20}$$

Бірдей мәнді тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырмасы:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{a-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	
$tg\alpha\pm tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$	$ctg\,\alpha-ctg\,\beta=-\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$$1)\sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 2\sin\frac{3\alpha+5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\alpha-5\alpha}{2} = 2\sin 4\alpha\cdot\cos\alpha$$

Мысал:

$$2)\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}} = ctg^2\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad 3)\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = ctg\alpha\cdot ctg\beta$$

Есеп шығарту:

Қосынды мен айырмаға жіктеу керек:

$$\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ = \frac{1}{2}\left(\sin 90^\circ - \sin 60^\circ\right) \qquad \cos 2x\cdot\cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x)$$

$$\sin 7\alpha\cdot\cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 10\alpha + \sin 4\alpha) \qquad \sin 5\beta\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{2}(\cos 7\beta - \cos 3\beta)$$

$$1) tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) - tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2tg\alpha$$

$$2)\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha} = tg3\alpha$$

3) Қосынды мен айырмаға жіктеу керек:

$$\sin 6\alpha\cdot\cos 9\alpha = \frac{1}{2}(\sin 15\alpha - \sin 3\alpha); \qquad \cos 4\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}(\cos 5\alpha + \cos 3\alpha)$$

Сабақ № 25. Тригонометриялық функциялардың қасиеттері мен графиктері.
Жоспары:

1. **Тригонометриялық синус функциясының қасиеттері мен графигі**
2. **Тригонометрилық косинус функциясының қасиеттері мен графигі**
3. **Тригонометриялық тангенс функциясының қасиеттері мен графигі**
4. **Тринонометриялық котангенс функциясының қасиеттері мен графигі**

Бақылау сұрақтары:

1. Бұрышты өлшеу шамаларын атаңдар.
2. Бірлік шеңберге анықтама беріңдер.
3. α санының синусы дегеніміз не?
4. α санының косинусы дегеніміз не?
5. Қандай қатынастар негізінде екі еселі бұрыштың тригонометриялық формулалары шығады?
6. Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға айналдыру формулаларын беріңдер?
7. Бірдей атты тригономтериялық фукнциялардың қосындысы мен айырмасының формулаларын беріңдер?

Функция, функцияның қасиеттері мен графигі, тригонометриялық функциялардың анықтамасы және мәндерінің кестесі, тригонометриялық тепе-теңдіктер.

9-сыныпта тригонометриялық функциялардың анықтамаларын, формулаларын және кейбір қасиеттерімен таныстыңдар. Осы мағлұматтарды ескеріп және график салудың алгоритмін қолдана отырып, тригонометриялық функциялардың графиктерін салуды қарастырамыз.

Енді әрбір тригонометриялық функциялардың графигін салуға тоқталайық.

1. $y = \sin x$ функциясын қарастырамыз.

Функцияның:

1. Анықтау облысы – барлық нақты сандар жиыны, яғни $x \in R$.
2. мәндер жиыны $[-1;1]$ кесіндісі, яғни $y \in [-1;1]$.

3. $\sin(x+2\Pi)=\sin x$ функция периодты, оның ең кіші периоды 2Π.
4. функция тақ, өйткені $\sin(-x)=-\sin x$.
5. $\left[-\frac{x}{2}+2\Pi n;\frac{\Pi}{2}+2\Pi n\right]$ кесінділерінде функция бірсарынды өспелі, $\left[\frac{\Pi}{2}+2\Pi n;\frac{3\Pi}{2}+2\Pi n\right]$ кесінділерінде бірсарынды кемімелі.

$(0;0),\left(\frac{\Pi}{6};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{\Pi}{2};1\right),\left(\frac{5\Pi}{6};\frac{1}{2}\right),(\Pi;0)$ нүктелерін координатталық жазықтыққа түсіріп $y=\sin x$ функциясының $[0;\Pi]$ кесіндісіндегі графигін саламыз.(26-сурет)

$y=\sin x$ функциясы тақ функция болғандықтан, оның графигі бас нүктеге қарағанда симметриялы қисық. Осы қасиетті пайдаланып, $[-\Pi;0]$ аралығында графикті жалғастырамыз. Сонда $y=\sin x$ функциясының $[-\Pi;\Pi]$ кесіндісіндегі графигін аламыз.(27-сурет)

Демек, $y=\sin x$ функциясының толық бір период ішіндегі графигін салдық. Енді периодты функцияның қасиеттерін пайдаланып, барлық анықталу облысындағы функция графигін салуға болады. (28-сурет)

$y=\sin x$ функциясының графигін *синуоида қисығы* деп атайды.

ІІ. $y=\cos x$ функциясын қарастырамыз.

Функцияның:
1. анықталу облысы – барлық нақты сандар жиыны, яғни $x\in R$.
2. мәндер жиыны $[-1;1]$ кесіндісі, яғни $y\in[-1;1]$.
3. $\cos(x+2\Pi)=\cos x$ функция периодты, оның ең кіші периоды 2Π.
4. функция жұп, өйткені $\cos(-x)=\cos x$.
5. $[2\Pi n;\Pi+2\Pi n]$ $n\in Z$ кесінділерінде функция бірсарынды кемімелі және $[-\Pi+2\Pi n;2\Pi n]$ $n\in Z$ кесінділерінде бірсарынды өсеплі функция.

$(0;1),\left(\frac{\Pi}{3};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{\Pi}{2};0\right),\left(\frac{2\Pi}{3};\frac{1}{2}\right),(\Pi;-1)$ нүктелерін координаталық жазықтықта белгілеп, $y=\cos x$ функциясының $[0;\Pi]$ кесіндісіндегі графигін саламыз (29-сурет).

$y=\cos x$ функциясы жұп функция болғандықтан, оның графигі ордината осіне қарағанда симметриялы қисық. Осы қасиетті қолданып, $[-\Pi;0]$ кесіндісінде графикті жалғастырып саламыз. Сонда $y=\cos x$ функциясының $[-\Pi;\Pi]$ кесіндісіндегі графигін аламыз (30-сурет).

Ендіпериодты функцияның қасиетін пайдаланып, барлық анықталу облысындағы функцияның графигін салуға болады (31-сурет).

$y=\cos x$ функциясының графигін *косинусоида қисығы* деп атайды.

Сонымен қатар $\cos x=\left(\frac{\Pi}{2}+x\right)$ екенін ескеріп, $y=\cos x$функциясының графигін $y=\sin x$ функциясының графигімен O_x осінің бойымен $\frac{\Pi}{2}$ қашықтығына теріс бағытта параллель көшіру арқылы да алуға болады.

ІІІ. $y=tgx$ функциясын қарастырайық. Функцияның :

1) анықталу облысы $\left\{x=\frac{\Pi}{2}+\Pi k, k\in Z\right\}$ жиынынан басқа барлық нақты сандар жиыны, себебі $y=tgx=\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\neq 0, x\neq\frac{\Pi}{2}+\Pi k, k\in Z$;
2) мәндер жиыны – барлық нақты сандар жиыны, яғни $tgx\in R$;
3) $y=tgx=tg(x+n\Pi), n\in Z$ -функция периодты, ең кіші оң периоды П саны;
4) функция тақ, өйткені $tg(-x)=-tgx$;
5) $\left[-\frac{\Pi}{2}+\Pi n;\frac{\Pi}{2}+\Pi n\right], n\in Z$ интервалында функция бірсарынды өспелі.

Енді tgx функциясының графигін салайық.

$(0;0), \left[\frac{\Pi}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right], \left(\frac{\Pi}{4};1\right), \left(\frac{\Pi}{3};\sqrt{3}\right)$ нүктелерін координаталық жазықтыққа белгілеп, $\left[0;\frac{\Pi}{2}\right)$ аралығында $y=tgx$ функциясының графигін саламыз (32-сурет).

$y=tgx$ функциясы тақ функция болғандықтан, оның графигі бас нүктеге қарағанда симметриялы қисық екенін ескеріп, $\left(-\frac{\Pi}{2};0\right]$ аралығындағы графикті жалғастырамыз. Сонда $y=tgx$ функциясының $\left(-\frac{\Pi}{2};\frac{\Pi}{2}\right)$ интервалындағы графигі шығады (33-сурет).

Енді периодты функцияның қасиетін пайдаланып, барлық анықталу облысындағы функцияның графигін салуға болады (34-сурет).

$y=tgx$ функциясының графигін *тангенсоида қисығы* деп атайды.

Тригонометриялық функциялардың графиктеріне қарапайым түрлендірулерді қолдануға мысалдар қарастырайық.

1-М, Берілген функцияның графигін салыңдар:

а) $y=ctg\left(x+\frac{\Pi}{6}\right)$; ә) $y=\sin\left(x-\frac{\Pi}{4}\right)-1$.

Шешуі: а) Алдымен $y=ctgx$ функциясының графигін саламыз.

Сосын ол графикті O_x осі бойынша $\frac{\Pi}{6}$ ара-қашықтыққа теріс бағытқа параллель көшіреміз (35-сурет).

ә) Алдымен $y=\sin x$ функциясының графигін саламыз. Графикті O_x осі бойымен $\frac{\Pi}{4}$ қашықтыққа оң бағытта параллель көшіреміз.

IV. $y=ctgx$ функциясын қарастырайық. Функцияның :

1) анықталу облысы $x\in(\pi n, \pi+\pi n)$ жиынынан басқа барлық нақты сандар жиыны, себебі $y=ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}, \sin x\neq 0, x\neq\Pi k, k\in Z$;
2) мәндер жиыны – барлық нақты сандар жиыны, яғни $ctgx\in R$;
3) $y=ctgx=ctg(x+n\Pi), n\in Z$ -функция периодты, ең кіші оң периоды П саны;
4) функция тақ, өйткені $ctg(-x)=-ctgx$;
5) $[\pi n;\pi+\pi n], n\in Z$ интервалында функция бірсарынды кемімелі.

Енді $y=ctgx$ функциясының графигін салайық.

$y=tgx$ функциясының графигін *котангенсойда қисығы* деп атайды.

Тригонометриялық функциялардың графиктеріне қарапайым түрлендірулерді қолдануға мысалдар қарастырайық.

$y = tg\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$y = ctg\,x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0, x \neq \pi n, n \in Z$

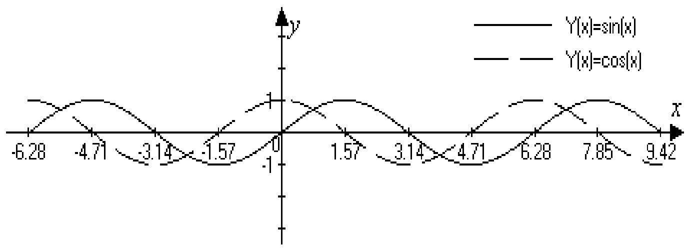
1-М, Берілген функцияның графигін салыңдар:

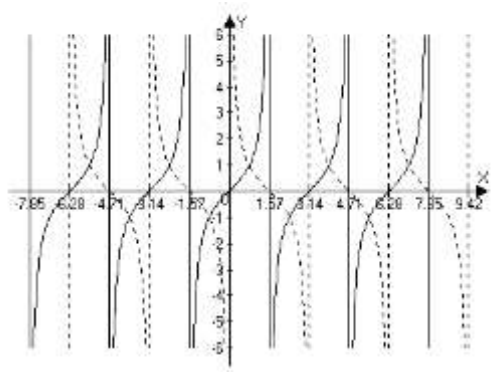
а) $y = ctg\left(x + \dfrac{\Pi}{6}\right)$; ә) $y = \sin\left(x - \dfrac{\Pi}{4}\right) - 1$.

Шешуі: а) Алдымен $y = ctgx$ функциясының графигін саламыз.

Сосын ол графикті O_x осі бойынша $\dfrac{\Pi}{6}$ ара-қашықтыққа теріс бағытқа параллель көшіреміз (35-сурет).

ә) Алдымен $y = \sin x$ функциясының графигін саламыз. Графикті O_x осі бойымен $\dfrac{\Pi}{4}$ қашықтыққа оң бағытта параллель көшіреміз.





Сабақ № 26.Кері тригонометриялық функциялар.

Жоспары:

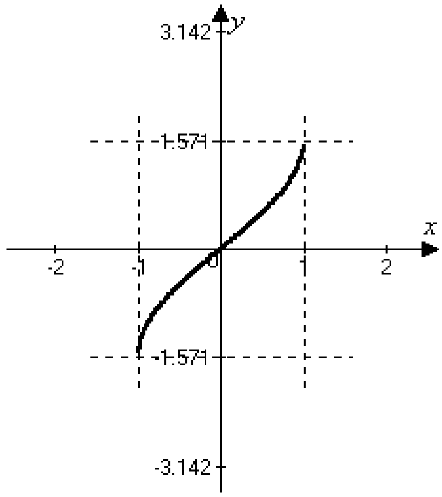
1. **Тригонометриялық арксинус функциясының қасиеттері мен графигі**
2. **Тригонометриялық арккосинус функциясының қасиеттері мен графигі**

Бақылау сұрақтары:

1. Тригонометриялық синус дегеніміз не?
2. Тригонометриялық косинус дегеніміз не?
3. Тригонометриялық тангенс пен котангенстің анықтамасын бер?
4. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді ата?
5. Келтіру формулалары?
6. Қосындының формулалары?
7. Бұрыштың өлшем бірліктері қандай?
8. Градустық өлшеуіштен радиандық және керісінше өту формулаларын бер?
9. Бірлік шеңбер дегеніміз не?
10. Қос бұрыштың формулаларын бер?

1) $\underline{y = \arcsin x}$

Функция $y = \sin x$, мұндағы $x \in (-\infty; +\infty)$ аралықта монотонды емес. Сондықтан оның монотонды болатын аралығын бөліп алу керек. $y = \arcsin x$ функциясы үшін $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ кесіндісі болады.



Сонымен: $y = \sin x$ $\quad x = \arcsin y$ $\quad \underline{y = \arcsin x}$

$y = \arcsin x$ функциясының қасиеттері:

1) Анықталу облысы $x \in [-1;1]$

2) Мәндер жиыны $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонnды өспелі $[-1;1]$

Мысал:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin\frac{1}{2}$

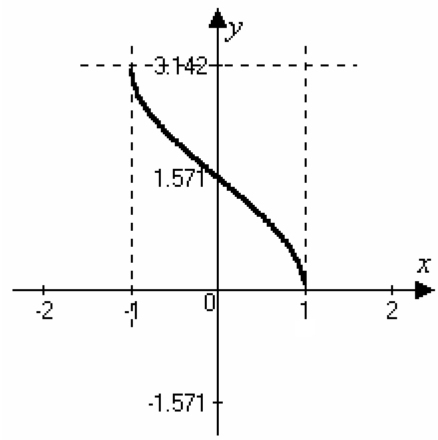
$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$

$\arcsin 0 = 0$

$\arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$

$\arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$



2) $\underline{y = \arccos x}$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ Монотондылық аралығы $0 \le x \le \pi$

$y = \arccos x$

$y = \arccos x$ функциясының қасиеттері

1) Анықталу облысы $x \in [-1;1]$

2) Мәндер жиыны $y \in [0;\pi]$

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция монотонды кемімелі $[-1;1]$

Мысал:

$\arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$\arccos(-1) = 180^\circ$ или π

$\arccos 0 = 90^\circ$ или $\frac{\pi}{2}$

$\arccos 0,708 = 44^\circ 55'$

$\arccos 0,112 = 83^\circ 34'$

Мысалдар:

1) Есептеу керек:

$\sin(2\arccos 0,796)$

$\sin 2\alpha$ түрінде қарастырып, формуласы арқылы есептеуге болады.

$$\sin\left(2\arccos 0,796\right)=2\sin\left(\arccos 0,796\right)\cdot\cos\left(\arccos 0,796\right)=2\sqrt{1-0,796^2}\cdot 0,796=0,964$$
$$\sin\left(2\arccos 0,796\right)=\sin\left(2\cdot 37°15'\right)=0,963$$

Сабақ № 27. Кері тригонометриялық функциялар.
Жоспары:

1. **Тригонометриялық арктангенс функциясының қасиеттері мен графигі**
2. **Тригонометриялық арккотангенс функциясының қасиеттері мен графигі**
3.

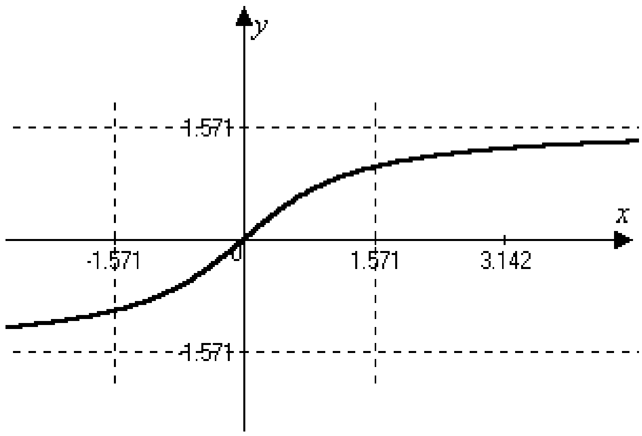
Бақылау сұрақтары:

1. Тригонометриялық синус дегеніміз не?
2. Тригонометриялық косинус дегеніміз не?
3. Тригонометриялық тангенс пен котангенстің анықтамасын бер?
4. Негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктерді ата?
5. Келтіру формулалары?
6. Қосындының формулалары?
7. Бұрыштың өлшем бірліктері қандай?
8. Градустық өлшеуіштен радиандық және керісінше өту формулаларын бер?
9. Бірлік шеңбер дегеніміз не?
10. Қос бұрыштың формулаларын бер?

3) $\underline{y=arctgx}$

Монотондылық аралығы $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

$y=tgx$
$x=arctgy$ $\qquad \underline{y=arctgx}$



$\underline{y=arctgx}$ функциясының қасиеттері

1) Анықталу облысы $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$

2) Мәндер жиыны $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

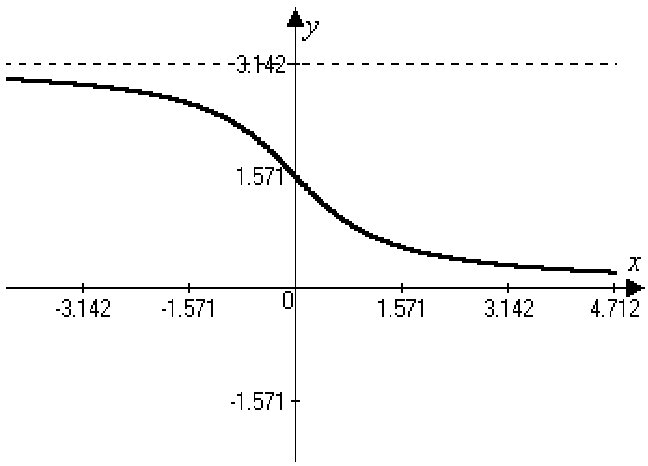
3) $arctg\left(-x\right)=-arctgx$

4) Функция монотонды өспелі $\left(-\infty;+\infty\right)$

Мысал:

$arctg1=45°$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad arctg2=63°26'$

$arctg\sqrt{3}=60°$ или $\frac{\pi}{3}$ $\qquad arctg14,7=86°11'$



4) $y=arcctgx$

Монотондылық аралығы $0<x<\pi$

$y=ctgx$
$x=arcctgy$ $\qquad \underline{y=arcctgx}$

$\underline{y=arcctgx}$ функциясының қасиеттері

1) Анықталу облысы $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$

$tg\left(arctgx\right)=x$ $\quad ctg\left(arcctgx\right)=x$

$tg\left(\arcsin x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad ctg\left(\arcsin x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$tg\left(\arccos x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad ctg\left(\arccos x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$tg\left(arcctgx\right)=\dfrac{1}{x}$ $\quad ctg\left(arctgx\right)=\dfrac{1}{x}$

2) Мәндер жиыны $y\in\left(0;\pi\right)$

3) $arcctg\left(-x\right)=\pi-arcctgx$

4) Функция монотонды кемімелі $\left(-\infty;+\infty\right)$

Мысал:

$arcctg1=45^\circ$ или $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad arcctg4,7=12^\circ$

$arcctg\sqrt{3}=30^\circ$ или $\dfrac{\pi}{6}$ $\quad arcctg10,8=5^\circ17'$

5) arc-функцияларға қарапайым амалдар қолдану келесі формулалармен жүзеге асады:

$\sin\left(\arcsin x\right)=x$ $\quad \cos\left(\arccos x\right)=x$

$\sin\left(\arccos x\right)=\sqrt{1-x^2}$ $\quad \cos\left(\arcsin x\right)=\sqrt{1-x^2}$

$\sin\left(arctgx\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \cos\left(arctgx\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sin\left(arcctgx\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \cos\left(arcctgx\right)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

arc-функциялар арасында келесі қатынас бар:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$$

1) $\sin\left(arctg2,76+\arccos\left(-0,786\right)\right)=-0,528$

2) $tg\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-0,704\right)-\arcsin\left(-0,236\right)\right)=-0,629$

Сабақ № 28. Қарапайым тригонометриялық теңдеулерді шешу.
Жоспары:

1. **Қарапайым тригонометриялық теңдеу ұғымы**
2. **Қарапайым тригономтериялық теңдеу түрлері**
3. **Қарапайым тригономтериялық теңдеуді шешудің шарттары**
4. **Қарапайым тригономтериялық теңдеуге байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:

1. Қандай тригонометриялық функияларды білесіңдер?
2. Негізгі қасиеттерін атап өтіңдер?
3. Қандай кері тригонометриялық функцияларды білесіңдер?
4. Негізгі қасиеттерін атап өтіңдер?

$\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ \ ctgx = a$ түріндегі теңдеулер **қарапайым тригонометриялық теңдеулер** деп аталады.

1) $\sin x = a \qquad |a| \le 1 \quad \boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$

2) $\cos x = a \qquad |a| \le 1 \quad \boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n; n \in Z}$

Мысал:

$\sin x = 0,437$

$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in Z$

$x = (-1)^n 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in Z$

$\cos 4x = -0,712$

$4x = \pm\arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in Z$

$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = \pm 33^\circ 51' + 90^\circ \cdot n, n \in Z$

3) $tgx = a$; a – кез келген мән $\quad \boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$

4) $ctgx = a$; a – кез келген мән $\quad \boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$

$tg\dfrac{x}{2} = 4$

$\dfrac{x}{2} = arctg 4 + \pi n, n \in Z$

$\dfrac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 151^\circ 54' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$ctg 3x = 4,72$

$3x = arcctg 4,72 + \pi n, n \in Z$

$3x = 11^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 3^\circ 59' + 60^\circ \cdot n, n \in Z$

Функцияның 0- ге, -1-ге, 1- ге тең болатын мәндерін еске түсірейік.

$\sin x = 0$, $x = \pi n, n \in Z$

$\sin x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\sin x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n, n \in Z$

$tg\, x = 0$, $x = \pi n, n \in Z$

$tg\, x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$ctg\, x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$ctg\, x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Бұл теңдеулер тригонометриялық теңдеулердің дербес жағдайлары деп аталады.
Теңдеулерді шешу керек:

1) $\sin 2x=0$

2) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

3) $\sin\left(4x+20^\circ\right)=-1$

4) $\cos\frac{x}{2}=-1$

5) $\cos 5x=0$

6) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$

7) $tg\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$

8) $ctg\frac{2}{3}x=1$

9) $tg4x=1$

10) $\sin 4x\cdot\cos 3x+\cos 4x\cdot\sin 3x=0$

11) $\cos^2 4x-\sin^2 4x=0$

12) $2\sin 6x\cdot\cos 6x=1$

13) $\sin 4x\cdot tg\frac{x}{2}=0$

14) $ctg\frac{x}{2}\cdot\left(1+\cos x\right)=0$

15) $\cos 7x\cdot\cos 3x+\sin 7x\cdot\sin 3x=0$

Шешулері: 1–9 теңдеулерінде сәйкес теңдеулерді шешу болып табылады.

1) $\sin 2x=0$

$2x=\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z}$

4) $\frac{x}{2}=\pi+2\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=2\pi+4\pi n, n\in Z}$

7) $x-\frac{\pi}{6}=\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z}$

2) $3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

$3x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n$

$3x=\frac{3}{4}\pi+2\pi n$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z}$

5) $5x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n, n\in Z}$

8) $\frac{2}{3}x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{3}{8}\pi+\frac{3}{2}\pi n, n\in Z}$

3) $4x+20^\circ=-90^\circ+360^\circ\cdot n, n\in Z$

$4x=-110^\circ+360^\circ$

$\boxed{x=-27^\circ 30'+90^\circ\cdot n, n\in Z}$

6) $2x-\frac{\pi}{3}=2\pi n, n\in Z$

$2x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z}$

9) $4x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n, n\in Z}$

Қалған теңдеулерді шешуде келтіру формулаларын қолдану керек.

10) $\sin 7x=0$

$7x=\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{7}n, n\in Z}$

11) $\cos 8x=0$

$8x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}n, n\in Z}$

12) $\sin 12x=1$

$12x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{6}n, n\in Z}$

13) $\sin 4x=0;$

$4x=\pi n, n\in Z;$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}n, n\in Z}$

$tg\frac{x}{2}=0$

$\frac{x}{2}=\pi n$

$\boxed{x=2\pi n, n\in Z}$

14) $ctg\frac{x}{2}=0;$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\pi+2\pi n, n\in Z}$

$1+\cos x=0$

$\cos x=-1$

$\boxed{x=\pi+2\pi n, n\in Z}$

15) $\cos 4x=0$

$4x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$\boxed{x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n, n\in Z}$

Теңдеуді шешу керек:

$1)\sin 2x = -0,72$ $\quad 2)\, ctg\left(\dfrac{x}{2} + 20^\circ\right) = 0,34$ $\quad 3)\cos\dfrac{x}{4} = -0,318$

$4)\, tg\left(\dfrac{\pi}{6} - 5x\right) = 1$ $\quad 5)\cos(2x - 3,4) = 0,112$

Шешулері:

$$1)\, 2x = (-1)^n \arcsin(-0,72) + \pi n, n \in Z$$
$$2x = (-1)^n \arcsin(-46^\circ 03') + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$
$$2x = (-1)^{n+1} \cdot 46^\circ 03' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$
$$x = (-1)^{n+1} \cdot 23^\circ 02' + 90^\circ \cdot n\ n \in Z$$

$$2)\, \frac{x}{2} + 20^\circ = arcctg 0,34 + 180^\circ \cdot n, n \in Z$$
$$\frac{x}{2} + 20^\circ = 71^\circ 13' + 180^\circ \cdot n,\ \ n \in Z$$
$$\frac{x}{2} = 51^\circ 13' + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$$
$$x = 102^\circ 26' + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$$

$$3)\, \frac{x}{4} = \pm \arccos(-0,318) + 2\pi n,\ n \in Z$$
$$\frac{x}{4} = \pm 108^\circ 32' + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$$
$$x = \pm 434^\circ 8' + 1440^\circ \cdot n,\ n \in Z$$

$$4)\, \frac{\pi}{6} - 5x = arctg 1 + \pi n,\ n \in Z$$
$$\frac{\pi}{6} - 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$
$$-5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$$
$$-5x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$$
$$x = -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{5} n,\ n \in Z$$

Сабақ № 29. Бір функцияға келтірілетін тригонометриялық теңдеулерді шешу.
Жоспары:

1. **Бір функцияға келтірілетін теңдеудің түрі**
2. **Бірдей функцияға келтірілетін теңдеуді шешу жолдары**
3. **Бірдей функцияға келтірілетін теңдеуге байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:

1) Тригонометриялық функцияларды ата?
2) Тригонометриялық синус, косинус дегеніміз не?
3) Тригонометриялық тангенс, котангенс дегеніміз не?
4) Қарапайым тригонометриялық теңдеу дегеніміз қандай теңдеу?
5) Кері тригонометриялық функцияларды ата?
6) Акфункциялардың негізгі тепе- теңдіктері?
7) Синус пен косинус функцияларының мәндер жиыны қандай?
8) Тангенс пен котангенс функцияларының мәндер жиыны қандай?

Бірдей формулаға келтірілетін тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдарын қарастырайық:

1) $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$

Бұл теңдеуді бірдей функцияға келтіруге болады: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$2\left(1-\cos^2 x\right)+5\cos x=4$

$2-2\cos^2 x+5\cos x-4=0$

$-2\cos^2 x+5\cos x-2=0$

$2\cos^2 x-5\cos x+2=0$

$\cos x=t$ деп алсақ, онда

$2t^2-5t+2=0$ $\quad D=25-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$

$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4};\quad t_1=2\quad t_2=\frac{1}{2}$ онда екі қарапайым теңдеуді шешу керек: $\sin x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=2$

$\underline{\sin x=a}$

$\sin x\neq 2$ теңдеуінің түбірлері жоқ, себебі $\lvert\sin x\rvert\leq 1$

$\sin x=\frac{1}{2}\quad x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Жауабы: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

2) $2\sin^2 x+5\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-2=0$

Келтіру формуласы арқылы бірдей бұрыштың функциясына келтірейік:

$2\sin^2 x-5\cos x-2=0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\cos x$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ескерсек:

$2\left(1-\cos^2 x\right)-5\cos x-2=0$

$2-2\cos^2 x-5\cos x-2=0$

$2\cos^2 x+5\cos x=0$

$\cos x\left(2\cos x+5\right)=0$

$\cos x=0$ $\quad 2\cos x+5=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ және $\cos x\neq -\frac{5}{2}$ – теңдеудің түбірлері бар, себебі. $\lvert\cos x\rvert\leq 1$

Жауабы: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

3) $tg^3x=tgx$

$tg^3x-tgx=0$

$tgx\left(tg^2x-1\right)=0\Rightarrow$

$tgx=0$

$x=\pi n, n\in Z$ және $tg^2x-1=0; tg^2x=1$ онда $tgx=\pm 1\quad x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}, k\in Z$

Жауабы: $x=\pi n, n\in Z;\quad x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}, k\in Z$.

Есептер шығару:

1) $\boldsymbol{\sin^2 x-5\sin x+4=0}$

2) $5\sin^2 x+6\cos x-6=0$

3) $\sin^2 x+2\sin x=3.$

4) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$3\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x-4=0.$

Сабақ № 29. Бір функцияға келтірілетін тригонометриялық теңдеулерді шешу.

Жоспары:

1. **Бірдей функцияға келтірілетін теңдеуді шешу әдістері**
2. **Бір функцияға келтірілетін тригонометриялық теңдеулерге байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:

1) Тригонометриялық функцияларды ата?
2) Тригонометриялық синус, косинус дегеніміз не?
3) Тригонометриялық тангенс, котангенс дегеніміз не?
4) Қарапайым тригонометриялық теңдеу дегеніміз қандай теңдеу?
5) Кері тригонометриялық функцияларды ата?
6) Акфункциялардың негізгі тепе- теңдіктері?
7) Синус пен косинус функцияларының мәндер жиыны қандай?
8) Тангенс пен котангенс функцияларының мәндер жиыны қандай?

1) $\sin 7x + \sin 2x = 0$

Келтіру формулаларын қолданып бірдей формулаға келтіруге болады: $\sin\alpha + \sin\beta =$
$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\frac{7x+2x}{2}\cdot\cos\frac{7x-2x}{2} = 0$

$2\sin\frac{9}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x = 0$ онда

$\sin\frac{9}{2}x = 0$ немесе $\cos\frac{5}{2}x = 0$

$\frac{9}{2}x = \pi n, n\in Z$ $\quad$ $\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in Z$

$x = \frac{2}{9}\pi n, n\in Z$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, k\in Z$

Жауабы: $x = \frac{2}{9}\pi n, n\in Z$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, k\in Z$.

2) $4\cos^3 x + 4\cos^2 x - 3\cos x - 3 = 0$

Сол жағын көбейтіндіге келтіруге болады:

$\left(4\cos^3 x + 4\cos^2 x\right) - \left(3\cos x + 3\right) = 0$

$4\cos^2 x\left(\cos x + 1\right) - 3\left(\cos x + 1\right) = 0$ онда

$\left(\cos x + 1\right)\left(4\cos^2 x - 3\right) = 0$

$\cos x + 1 = 0$ немесе $4\cos^2 x - 3 = 0$

$\cos x = -1$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$x = \pi + 2\pi n, n\in Z$ $\quad$ $\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}, k\in Z$

Жауабы: $x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}, k\in Z$ $\quad$ $x = \pi + 2\pi n, n\in Z$.

Есептер шығарту:

1) $\cos x + \cos 2x = 0.$
2) $\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x = 0.$
3) $\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}^2 x + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}.$

Сабақ № 30. Біртектес тригонометриялық теңдеулерді шешу.
Жоспары:

1. **Біртекетес тригонометриялық теңдеу ұғымы**
2. **Біртектес тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдары**
3. **Біртектес тригонометриялық теңдеуге байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:

1) Тригономентриялық функцияларды атаңдар?
2) Тригонометриялық синус пен косинус функциясының анықталу облысы мен мәндер жиынын атаңдар?
3) Кері тригонометриялық функция дегеніміз не?
4) Қарапайым тригонометриялық теңдеулер дегеніміз не?
5) Қандай тригонометриялық теңдеулерді білесіңдер?
6) Тригонометриялық синус теңдеуінің жалпы шешімі қандай?
7) Тригонометриялық косинус теңдеуінің жалпы шешімі қандай?
8) Бірдей формулаға келтірілетін теңдеулірді шешудің негізгі әдістері?

Анықтама:

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + a_2 u^{n-2} v^2 + \cdots + a_{n-1} u v^{n-1} + a_n v^n = 0$$

түріндегі теңдеу $\boldsymbol{u}$ мен $\boldsymbol{v}$ ға қатысты *біртектес теңдеу* деп атайды.
Егер ***u=sinx*** және ***v=cosx*** болса, онда берілген теңдеу *біртектес тригонометриялық теңдеу* деп аталады.
Біртектес тригонометриялық теңдеулердің бірінші және екінші ретті түрлерін қарастырамыз:

1. $\boldsymbol{a \cdot sinx + b \cdot cosx = 0}$
2. $\boldsymbol{a \cdot sin^2x + bsinx \cdot cosx + c \cdot cos^2x = 0}$

Бұларды шешу жолдарын қарастырайық:
1) $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$ теңдеуін қарастырайық.
Бұл теңдеудің сол жағы $\sin x$ және $\cos x$ функцияларына қатысты біртекті көпмүше, ал оң жағы нолге тең екенің көреміз. Бұл түрдегі теңдеулерді шешу үшін теңдеудің әрбір мүшесін $\cos x$ немесе $\sin x$ - тың дәрежесіне бөлу керек:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{10\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$tg^2 x - 10tgx + 21 = 0,$

Байқасақ tgx ффункциясына қатысты тригонометриялық теңдеу шығады.
$tgx = t$ деп алып,

$t^2 - 10t + 21 = 0$

$D = 100 - 84 = 16$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 7; \quad t_2 = 3$

Онда $tgx = 7$ $\qquad$ $tgx = 3$
$x = arctg7 + \pi n, n \in Z$ $\qquad$ $x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

$x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z$ $\qquad$ $x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$

Жауабы: $x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z$ $\qquad$ $x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$.

2) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$

Берілген теңдеу біртектес тригонометриялық теңдеуге келтіріледі, ол үшін $2 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.

Мынаны аламыз:

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

разделим на $\cos^2 x$

$$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$$

$$tgx = t; \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}; \quad t_1 = 3; t_2 = 1$$

$tgx = 3$

$x = arctg3 + \pi n, n \in Z$

$x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$

$tgx = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Жауабы: $x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Өз беттеріңмен:

1) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$
   Жауабы: x = π/4 + πn, n Є Z.
2) $2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$
   Жауабы: x =arctg2+ πn, n Є Z, x = π/4 + πn, n Є Z.
3) $\sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$
   Жауабы: x =arctg3 + πn, n Є Z, x =arctg7 + πn, n Є Z.
4) $2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = \sin^2 x$
   Жауабы: x =arctg3+ πn, n Є Z, x = - π/4 + πn, n Є Z.

Үй тапсырмасы:

1) $3\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - \cos x = 0$ $\qquad$ 2) $\sin 6x - \sin 4x = 0$

3) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$

Сабақ № 31. Әр түрлі типтегі тригонометриялық теңдеулерді шешу.

Жоспары:

1. **Тригонометриялық теңдеулердің түрлері**
2. $a\sin x + b\cos x = c$ **түріндегі теңдеу, оны шешу**
3. $a\sin x + b\cos x = c$ **түріндегі теңдеуге берілетін есептер**

Өткен сабақтарда: 1) $\sin x = a, \cos x = a, tgx = a, ctgx = a$ түріндегі қарапайым триг. Теңдеулерді; 2) квадраттық, біртектес триг. Теңдеулерді қарастырдық.

Ал енді $\sin x$ және $\cos x$ функцияларына қатысты сызықтық теңдеулерді шешіп көрейік. Жалпы түрі: $a\sin x + b\cos x = c$ болсын. Теңдеудің $c^2 \le a^2 + b^2$ болғанда ғана шешімі бар болады. Бұл теңдеуді: 1) $\sin x$ және $\cos x$ функцияларын $tg\frac{x}{2}$ арқылы өрнектеу, $tg\frac{x}{2}$ қатысты квадраттық теңдеуге келтіру; 2) көмекші бұрыш енгізу арқылы шешуге болады.

Мысалдар қарастырайық:

1) $8\sin x + 3\cos x = 5$

$c^2 \le a^2 + b^2$ шартын тексерейік; шынымен 25 < 64 + 9 $\Rightarrow$ теңдеудің шешімі бар.

$$8\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 3\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5 \qquad 16tg\frac{x}{2} + 3 - 3tg^2\frac{x}{2} = 5 + 5tg^2\frac{x}{2}$$

$$8tg^2\frac{x}{2} - 16tg\frac{x}{2} + 2 = 0 \qquad 4tg^2\frac{x}{2} - 8tg\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = t\, 4t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = 64 - 16 = 48$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$t_1 = 1,87 \qquad t_2 = 0,134$$

Мынаны аламыз:

$$tg\frac{x}{2} = 1,87 \qquad \text{и} \qquad tg\frac{x}{2} = 0,134$$

$$\frac{x}{2} = arctg1,87 + \pi n, n \in Z \qquad \frac{x}{2} = arctg0,134 + 180^\circ k, k \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 61^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z \qquad \frac{x}{2} = 7^\circ 38' + 180^\circ k, k \in Z$$

$$x = 123^\circ 44' + 360^\circ n, n \in Z \qquad x = 15^\circ 16' + 360^\circ k, k \in Z$$

Жауабы: $x = 123^\circ 44' + 360^\circ n, n \in Z$; $x = 15^\circ 16' + 360^\circ k, k \in Z$.

2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ шартын тексерейік: $1 < 3 + 1$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$$

$$\cos 30^\circ \cdot \sin x - \sin 30^\circ \cdot \cos x = 1$$

$\sin\left(x + 30^\circ\right) = 1$ – дербес жағдайы $\Rightarrow$

$$x + 30^\circ = 90^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

Сабақ № 32. Әр түрлі тригонометриялық теңдеулерді шешу.

Жоспары:

1. **Тригонометриялық теңдеулерді шешу туралы қорытынды**

2. **Тригонометриялық теңдеулердің әр түріне берілетін есептер**

Тригонометриялық теңдеуді шешу жолдары жайлы қандай қорытынды шығаруға болады? Ең көп қолданылатын екі әдіс бар:

1) Тригонометриялық теңдеуді алгебралық түрге әртүрлі әдістерді қолданып келтіру.
2) Көбейткіштерге жіктеу әдісі арқылы. Ол әдіс арқылы қарапайым теңдеулерді шешу жағдайына келтіруге болады.

Әртүрлі тригонометриялық теңдеулерді шешуді қарастырайық:

3) $\cos 15x = \sin 5x$

$\cos 15x - \sin 5x = 0$

$\cos 15x - \cos\left(90^\circ - 5x\right) = 0$

Формуласын қолданайық $\cos\alpha - \cos\beta$

$$-2\sin\frac{15x + 90^\circ - 5x}{2}\cdot\sin\frac{15x - 90^\circ + 5x}{2} = 0$$

$$-2\sin\frac{10x + 90^\circ}{2}\cdot\sin\frac{20x - 90^\circ}{2} = 0$$

$$-2\sin\left(5x + 45^\circ\right)\cdot\sin\left(10x - 45^\circ\right) = 0$$

онда:

$\sin\left(5x + 45^\circ\right) = 0$	$\sin\left(10x - 45^\circ\right) = 0$
$5x + 45^\circ = 180^\circ\cdot n, n\in Z$	$10x - 45^\circ = 180^\circ\cdot k, k\in Z$
$5x = -45^\circ + 180^\circ\cdot n, n\in Z$	$10x = 45^\circ + 180^\circ\cdot k, k\in Z$
$\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n\in Z}$	$\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ\cdot k, k\in Z}$

Жауабы: $\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n\in Z}$; $\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ\cdot k, k\in Z}$.

4) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$ теңдеудің сол жағы- формула

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$\sin\frac{x}{2} = 0$	$\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$
	$\sin\frac{x}{2} = 1$
$\frac{x}{2} = \pi n, n\in Z$	$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\in Z$
$\underline{x = 2\pi n, n\in Z}$	$\underline{x = \pi + 4\pi k, k\in Z}$

Жауабы: $\underline{x = 2\pi n, n\in Z}$ $\underline{x = \pi + 4\pi k, k\in Z}$.

5) $\sin\left(30^\circ + x\right) + \sin\left(30^\circ - x\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta$ формуласын теңдеудің сол жағына қолданайық:

$$2\sin\frac{30^\circ+x+30^\circ-x}{2}\cdot\cos\frac{30^\circ+x-30^\circ+x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2\sin 30^\circ\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2};\qquad x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

Жауабы: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

6) $\cos\left(x-70^\circ\right)=\sin\left(x+70^\circ\right)$

$$\cos\left(x-70^\circ\right)-\sin\left(x+70^\circ\right)=0$$

$\cos\alpha=\sin\left(90^\circ-\alpha\right)$ екенін ескеріп: $\sin\left(x+70^\circ\right)$-ті $\cos\left(90^\circ-x-70^\circ\right)=\cos\left(20^\circ-x\right)$, онда $\cos\left(x-70^\circ\right)-\cos\left(20^\circ-x\right)=0$.

$\cos\alpha-\cos\beta$ формуласын қолданып, мынаны аламыз:

$$-2\sin\frac{x-70^\circ+20^\circ-x}{2}\cdot\sin\frac{x-70^\circ-20^\circ+x}{2}=0$$

$$-2\sin\frac{-70^\circ}{2}\cdot\sin\frac{2x-90^\circ}{2}=0$$

$$2\sin 35^\circ\cdot\sin\left(x-45^\circ\right)=0$$

$2\sin 35^\circ\neq 0$, то $\sin\left(x-45^\circ\right)=0$

$$x-45^\circ=180^\circ n, n\in Z$$

Жауабы: $\underline{x=45^\circ+180^\circ n, n\in Z}$

7) $\cos 3x+\sin 2x\cdot\sin x=0$

$$\cos 3x-\frac{1}{2}\left(\cos 3x-\cos x\right)=0$$

$$\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$$

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)=0$$

$$\cos 3x+\cos x=0\qquad 2\cos 2x\cdot\cos x=0\qquad \cos 2x\cdot\cos x=0$$

$$\cos 2x=0\qquad\qquad \cos x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

Жауабы: $\underline{x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z}$ $\qquad$ $\underline{x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z}$

8) $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+3\cos\left(\pi-x\right)-2=0$

Мұндай теңдеулерді шешу жолын еске түсірейік. Келтіру формулаларын қолданамыз:

$$2\sin^2 x-3\cos x-2=0$$

Бірдей функцияға келтірейік: $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, онда

$$2\left(1-\cos^2 x\right)-3\cos x-2=0$$

$$2-2\cos^2 x-3\cos x-2=0$$

$$2\cos^2 x+3\cos x=0$$

$$\cos x\left(2\cos x+3\right)=0$$

бұдан

$\cos x = 0$ және $2\cos x + 3 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\cos x = -\frac{3}{2}$, бұл теңдеудің шешімі жоқ, себебі $\left|-\frac{3}{2}\right| > 1$, а $|\cos x| \le 1$ сондықтан жауабы: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Есеп шығарту:

1) $2\sin^2(\pi + x) + 5\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 4 = 0$ 2) $\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 1 = 0$

3) $\sin 2x \cdot tgx = 1$ 4) $15\sin x + 10\cos x = 12$ 5) $\sin(50^\circ - x) = \cos(50^\circ + x)$

Сабақ № 33. Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешу.

Бақылау сұрақтары:

1.Тригонометриялық функциялардың графиктері, қасиеттері ($y = \sin x;\ y = \cos;\ y = tgx;\ y = ctgx$).

2.Кері триг. функциялар ($y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$).

3.Қарапайым триг. теңдеулерді шешу ($\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ ctgx = a$).

4.Дербес жағдайлары $a = 0; \pm 1$ ($\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ ctgx = a$).

5.Тригонометриялық теңдеулердің түрлері, оларды шешу жолдары.

$\sin x < m$ $\cos x < m$ $tgx < m$ $ctgx < m$

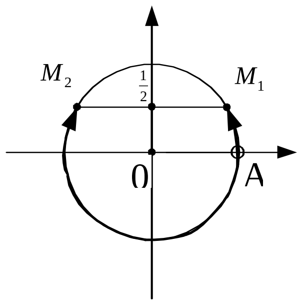
$\sin x > m$ $\cos x > m$ $tgx > m$ $ctgx > m$ түріндігі теңсіздіктер қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер деп аталады.

Мұндағы m – берілген сан.

Қарапайым тригонометриялық теңсіздікті шешу дегеніміз –берілген теңсіздікті дұрыс сандық теңсіздікке айналдыратын аргумент мәндерінің жиынын табу.

Мысалдар қарастырайық:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$, $|\sin x| \le 1$болғандықтан, берілген теңсіздікті $-1 \le \sin x \le \frac{1}{2}$



$\cup AM_1 = \frac{\pi}{6}$

$\cup AM_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$

онда $\sin x < \frac{1}{2}$ теңсіздікке $-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$ аралығындағы доғалар сәйкес келеді. $\sin\alpha$ функциясының периоды 2π, онда бұл теңсіздіктің шешімі $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \le x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

2) $\cos x > -\frac{1}{2}$

$|\cos x| \le 1$ ескеріп, $-\frac{1}{2} < \cos x \le 1$ жазамыз

$\cos x > -\frac{1}{2}$ теңсздігіне $-\frac{2}{3}\pi < x \le \frac{2}{3}\pi$ аралығының доғалары сай келеді. Жалпы шешімі $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$.

3) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, дәл сол сияқты $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңсіздігі

$\frac{\pi}{4} < x < \pi - \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$

4) $tgx > \sqrt{3}$, былай жазуға болады: $\sqrt{3} < tgx < \infty$, tg функциясы шектелмегендіктен. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ болғанда орындалады; тангенс функциясының периоды π, онда $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

Есептеу керек:

5) $ctgx > 1$

$1 < ctgx < \infty$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$

$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Жалпы шешімі: $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Теңсіздіктерді шешіңдер (136—138):

136. а) $\sin x > 0$; ә) $\cos x < 0$;
б) $\operatorname{tg} x < 0$; в) $\operatorname{ctg} x > 0$.

137. а) $\sin x \leq \frac{1}{2}$; ә) $\cos x \geq \frac{1}{2}$;
б) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}\ \operatorname{ctg} x \leq \sqrt{2}$.

138. а) $\cos 5x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\sin 8x < \frac{1}{2}$;
б) $\operatorname{ctg} 2x > -1$; в) $\operatorname{tg} 3x \leq -1$.

Сабақ № 34. Есеп шығару.

Жоспары:

1. **Тригонометриялық теңдеулерге байланысты есептер шығару**
2. **Бақылау жұмысы**

Бақылау сұрақтары:

1. Тригонометриялық функцияларды атаңдар?
2. Олардың негізгі қасиеттерін атап өтіңдер?
3. Кері тригонометрриялық функциялардың негізгі қасиеттері?
4. Қарапайым тригонометориялық теңдеулер?
5. Олардың шешімдері?
6. Біртектес тригонометриялық теңдеулерді шешу жолы?
7. Бірдей функцияға келтірілетін тригонометриялық теңдеулерді шешу жолдары?
8. Тригонометриялық теңдеулерді шешуде нені қолданады?
9. Тригонометриялық теңсіздіктер дегеніміз не?
10. Оларды шешу?

Есеп шығарту.

№1

1) $\cos 2x = 0.26$ 2) $ctg\left(\frac{x}{2} + 10^0\right) = 4.2$

3) $tg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$=0 4) $3sin^2x - 4sinx \cdot cosx + cos^2x = 0$

5) $\cos x + 12\sin x = 9$

№2

1) $\sin\frac{x}{3} = 0.78$ 2) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\cos(\pi - x) + 2 = 0$

5) $8\sin x + \cos x = 4$

№3

1) $\cos\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sin(x - \pi) = \frac{1}{2}$

3) $tg(x + 30^0) = 1$ 4) $cos^2x - 3sinx \cdot cosx + 1 = 0$

5) $15\sin x + 10\text{os}\, x = 12$

Бақылау жұмысы:

Вариант I	
1) $\cos 2x = 0,26$	6) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$
2) $ctg\left(\frac{x}{2} + 10^\circ\right) = 4,2$	7) $3\sin 2x = 2\cos x$
3) $\sin\frac{x}{3} = -0,09$	8) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$
4) $tg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$	9) $\cos x + 12\sin x = 9$
5) $\sin(2 - 3x) = 0,098$	10) $\sin(20^\circ + x) + \cos(70^\circ + x) = 1$

Вариант II	
1) $\sin\frac{x}{3} = 0,78$	6) $\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + 2\cos(\pi - x) + 2 = 0$
2) $\cos\left(\frac{x}{3} + 20^\circ\right) = 0,87$	7) $3\sin 2x = 2\cos x$
3) $tg\frac{x}{3} = -0,09$	8) $4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1$
4) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$	9) $\cos x + 12\sin x = 9$
5) $\sin(2 - 3x) = 0,012$	10) $\sin(20^\circ + x) + \cos(50^\circ + x) = 1$

Вариант III

1) $ctg\frac{x}{2}=1{,}8$	6) $3\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\sin(\pi-x)+1=0$
2) $\cos\left(\frac{x}{2}-10^\circ\right)=0{,}84$	7) $3\sin x-5\cos x=0$
3) $\sin 5x=-0{,}56$	8) $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$
4) $tg\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=-1$	9) $8\sin x+\cos x=4$
5) $\sin(x-1{,}2)=0{,}112$	10) $\cos^4 x-\sin^4 x=-0{,}5$

Вариант IV

1) $ctg\frac{x}{5}=0{,}35$	6) $2\sin^2(\pi+x)+5\sin\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=0$
2) $\sin\left(50^\circ+2x\right)=-0{,}68$	7) $\cos^2 x-3\sin x\cdot\cos x+1=0$
3) $\cos 3x=0{,}84$	8) $\sin 2x\cdot tgx=1$
4) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$	9) $15\sin x+10\cos x=12$
5) $tg\left(\frac{x}{2}-1{,}8\right)=0{,}208$	10) $\sin\left(50^\circ-x\right)=\cos\left(50^\circ+x\right)$

№4 бөлім бойынша бақылау сұрақтары.

1. Бұрышты өлшеу шамаларын атаңдар.
2. Бірлік шеңберге анықтама беріңдер.
3. α санының синусы дегеніміз не?
4. α санының косинусы дегеніміз не?
5. Қандай қатынастар негізінде екі еселі бұрыштың тригонометриялық формулалары шығады?
6. Тригонометриялық функциялардың көбейтіндісін қосындыға айналдыру формулаларын беріңдер?
7. Бірдей атты тригономтериялық фукнциялардың қосындысы мен айырмасының формулаларын беріңдер?
8. Теңдікті дәлелдеңдер: а) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
б) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; в) $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$; г) $\cos 2\alpha = 2\cos^2$
9. Кері тригонометриялық функцияларды атаңдар?
10. Олардың қайсысы тақ, қайсысы жұп?