Бөлім V Туынды және оның қосымшасы.

Сабақ № 35. Функция өсімшесі.

Жоспары:

1. **Функция аргументінің өсімшесі мен фунцкия өсімшесі.**
2. **Функция өсімшесінің геометриялық интерпретациясы**
3. **Функция өсімшесіне берілетін есептер**

Бақылау сұрақтары:

1) Функция дегеніміз не?
2) Функцияның анықталу облысы мен мәндер жиыны дегеніміз не?
3) Функцияның негізгі түрлерін атап шығыңдар?
4) Функцияның негізгі қасиеттерін атаңдар?
5) Функияның нүктедегі мәнін қалай анықтаймыз?
6) Өздерің білетін функциялардың графиктері қалай аталады?
7) Функцияның графигін қалай сызуға болады?

Функция аргументінің өсімшесі мен фунцкия өсімшесі.

$y = f(x)$ функциясы берілсін. Егер х айнымалысының мәні x_1-ден x_2-ге ауысатын болса, онда оның жаңа мәні мен алғашқы мәндерінің айырмасы функция аргументінің өсімшесі деп аталады да, былай белгіленеді: Δх.

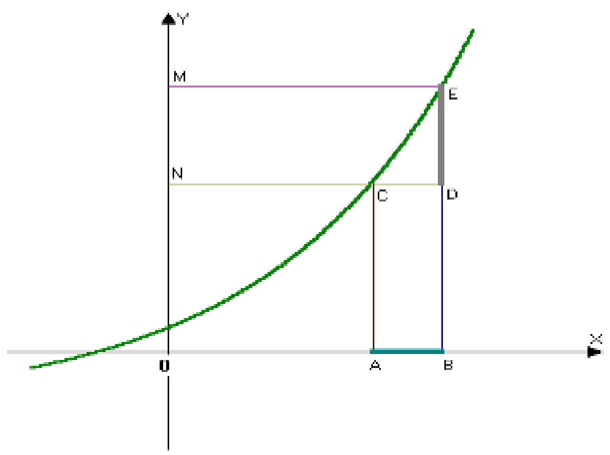
Яғни, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Бұдан, $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Аргумент өсімшесі оң да, теріс те бола алады.

Мысал, егер х мәні , 5- тен 5,2-ге дейін өзгерсе, онда Δх=5,2-5=0,2, ал егер 10- нан 9,7- ге дейін өзгерсе, онда Δх=9,7-10=-0,3 болады.

Мысал2, $y=x^2$ функциясы берілсін. Оның аргументінің алғашқы мәні $x_1=3$ болып, $x_2=3,5$-ке ауыссын, онда Δх=3,5-3=0,5.



Функцияның $x_1=3$ болғандағы мәні мен $x_2=3,5$ –тегі мәнін тапсақ, мынаны аламыз.:

$y_1 = 3^2 = 9$

$y_2 = 3,5^2 = 12,25$.

y_1 шамасы функцияның алғашқы мәні, y_2 жаңа мәні деп аталады, ал $y_2 - y_1$ айырмасы функция өсімшесі деп аталады.

Функция өсімшесін Δу деп белгілейді де, былай есептейді: $\Delta y = y_2 - y_1 = 12,25 - 9 = 3,25$.

Функцияның кез келген х нүктесіндегі өсімшесін табу үшін мына формуланы қолданамыз: $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, мұндағы x_0- функция аргументінің алғашқы мәні, Δх- аргумент өсімшесі.

Функция өсімшесін табу үшін:

1) берілген функционалдық тәуелділікте х- тің орнына х+ Δх- ті, у- тің орнына у+ Δу-ті қою керек.
2) Алынған мәннен берілген мәнді мүшелеп алу керек.

Мысал3, $y = 2x^2+3$ функциясының өсімшесін табу керек.

Шешуі.

$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3 =$

$= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3;$

$y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3$

$- y \quad = 2x^2 + 3$

$\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

$f(x) = x^2 + 2x + 5$ функциясының $x = 2$, $\Delta x = 0,1$ болғандағы өсімшесін есептеңдер: $x + \Delta x = 2,1$

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2,1) - f(2) =$

$2,1^2 + 2*2,1 + 5 - (2^2 + 2*2 + 5) = 0,61$

№1

Берілген функциялардың $x_0=2$, $\Delta x=0,5$ болғандағы функция өсімшесін табу керек?

а) $y = x^2$; б) $y = 3x - 4$; в) $y = 2x - 3$;

№2

1) $y=2x+1$ функциясының тақ- жұптылығын анықтап, өсімшесін табу керек.

а) $x_1=4$-тен $x_2=4,3$- ке; ә) $x_1=0$-тен $x_2=0,2$- ке;

б) $x_1=2$-тен $x_2=1,5$- ке дейін өзгереді.

2) $y=x^2-1$ функциясының аргумент өсімшесі мен функция өсімшесін табу керек.

а) $x_1=2$-тен $x_2=2,5$- ке; ә) $x_1=3,6$-тен $x_2=3$- ке дейін өзгереді.

163. $f(x)$ **функциясының** x_0 **нүктесіндегі өсімшесін табыңдар:**

а) $f(x) = 1 - 2x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = -0,01$;

ә) $f(x) = -2x + 1,6$, $x_0 = -3$, $\Delta x = -0,1$;

б) $f(x) = 3x^2 - 5$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$;

в) $f(x) = 3,5x^2$, $x_0 = -3$, $\Delta x = -0,35$.

Сабақ № 36. Функцияның нүктедегі шегі. Шектің негізгі қасиеттері.

Жоспары:

1. **Функцияның нүктедегі шегі ұғымы**
2. **Функцияның нүктедегі шегінің анықтамасы**
3. **Шектің негізгі қасиеттері**
4. **Функция шектерін табу жолдары**
5. **Анықталмағандықтарды ашу**

Математикалық анализдің ең негізгі фундаментальді ұғымы функция шегі болып табылады. Математиканың негізгі ұғымдары- туынды, интеграл, қатар, және т.б. XVII ғасырда ашылған еді. Бірақ бұлардың қатаң дәлелдемесі шек ұғымы негізінде 150 жылдан соң ғана берілген еді.

Функцияның нүктедегі және шексіздіктегі шегі ұғымдарын бөледі. Ең бірінші функцияның нүктедегі шегін қарастырайық, яғни $x \to a$.

Бір жағынан бұл ұғым өте қарапайым және айқын болып табылады.

$f(x) = x^2 + x$ функциясы берілсін және $x \to 2$ белгілі болсын, яғни х 2-ге жақын мәндерді қабылдайтыны белгілі болсын. Бұдан f(x) функциясының 6- ға жақын мәндерді қабылдайтыны анық, яғни f(2).

Бұл жағдайда былай жазады $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 + x) = 6$, немесе жалпы түрде: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Оқылуы: f(x) функциясының х а-ға ұмтылғандағы шегі b-ға тең.

Дегенмен, барлығы оңай емес! $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ функциясын қарастырайық. Бұл функцияның мәні 1- ден өзгеше барлық нақты сан дарда бар болатыны белгілі.

$x \to 1$ оң немесе сол жақтан ұмтылсын. Мәндер кестесін құрайық.

X	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
f(x)	4,9	4,99	4,999	4,9999	4,99999	4,999999

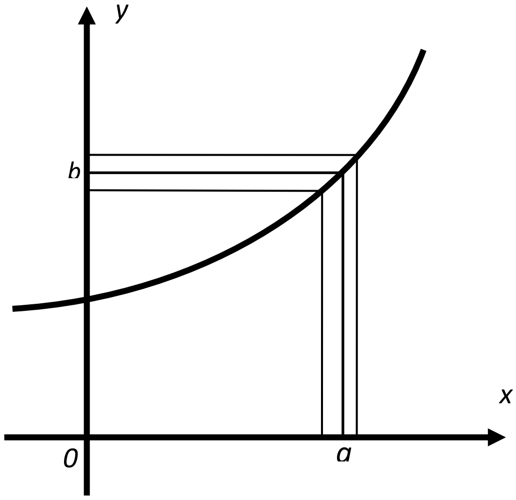
f(x) функциясы 5- ке ұмтылатыны көрініп тұр. Ал егер де х 1- ге оң жақтан ұмтылса ше?

X	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
f(x)	5,1	5,01	5,001	5,0001	5,00001	5,000001

Көріп тұрғанымыздай $f(x) \to 5$. Ал f(1)- де мәні болмайды.

Функцияның нүктедегі шегінің анықтамасын берейік, ол Коши анықтамасы немесе «ε – δ тіліндегі» анықтамасы деп аталады.

у = f(x) функциясы x = a нүктесінің маңайында анықталсын, тек бұл нүктеден басқасында.



x = a болғандағы функцияның шегі деп b санын айтады (немесе $x \to a$), егер кез келген мейлінше кішкене ε > 0 үшін қандай да бір δ > 0 табылып, 0 < $|x-a| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын х мәндеріне сәйкес келетін функция мәндері мына теңсіздікті қанағаттандырса: $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Басқаша былай айтуға болады: $(a-\delta; a+\delta)$ интервалына тиісті барлық х- терге сәйкес келетін функция мәндері $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ интервалына тиісіт болады.

Шектердің кейбір қасиеттеріне тоқталайық:

1) $\lim kf(x) = k\lim f(x)$, тұрақты коэффициентті шек таңбасының алдына шығаруға болады..

2) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$. Ақырлы функциялардың алгебралық қосындысына қолдануға болады.

3) $\lim(f(x)\cdot g(x)) = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$. Өз беттерімізбен оқып көрейік.

4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\ \textit{если}\ \lim g(x) \neq 0$. Бөліндінің шегі шектердің бөліндісіне тең болады.

5) $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$, көпмүшенің $x \to a$ шегі x = a болғандағы көпмүше мәніне тең болады.

6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)},\ \textit{если}\ \lim\limits_{x\to a} Q_m(x) \neq 0$.

Функция шектерін таба білу– математикалық анализді меңгерудің қажетті шарты болып табылады. Ол шек қасиеттері мен алгебралық түрлендірулерді қолдана білуге байланысты.

Енді функцияның нүктедегі шегін табу әдістемесін қарастырайық.

$\lim\limits_{x\to 3}(2x+5) = 11;\quad \lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-3) = -3;\quad \lim\limits_{x\to 1}(2x^3+5x-1) = 6$;

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x}{2x-1} = 1{,}8;\quad \lim\limits_{x\to 1}\ln\dfrac{2x+1}{x+3} = \ln\dfrac{3}{4};\quad \lim\limits_{x\to 2} e^{2x} = e^4$

Бөлшек- рационал функцияның шегін қарастырайық.

Егер функцияның бөлімі 0-ден өзгеше болса, онда оның бұл нүктеде шегі бар болады. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+1}=3{,}5;\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x+5}{x^2+1}=5$

Егер бұл нүктеде мәні жоқ болса, онда функция шегі шексіздікке тең болады: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\infty;\qquad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x^2-1}=\infty;\qquad \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^3-x^2-4}=\infty$

Егер алымы мен бөлімінде 0 тұрса, онда оны **анықталмағандық** деп атайды да, былай белгілейді: $\dfrac{0}{0}$.

Бұларды ашу әдістемесі өте оңай, яғни алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктеу арқылы табуға болады

Мысал қарастырайық:

14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}=$(x = 1 болғанда функция алымы мен бөлімі 0 екенін анықтап $\dfrac{0}{0}$, алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейік, оның біреуі (x – 1), ал екіншісі квадрат үшмүшенің көбейткіші болып табылады) =

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x-3}=\frac{6}{-2}=-3.$$

Бұл негізгі әдістемесі болып табылады. Тағы мысалдар қарастырайық.

15 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{3x^2+2x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{3x-1}=\dfrac{1}{-4}$

16 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-7}{x+5}=\dfrac{-5}{7}=-\dfrac{5}{7}$

17 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

18 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+9x-2}{3x^2+5x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(5x-1)}{(x+2)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x-1}{3x-1}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+3x-2}{2x^2-11x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2(x-\frac{1}{2})(x+2)}{2(x-\frac{1}{2})(x-5)}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x-5)}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x+2}{x-5}=\frac{2{,}5}{-4{,}5}=-\frac{5}{9}$$

Келесідей шектерді өз беттерімен есептеп көріңдер:

19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$ 20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}$ 21 $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-6t+8}{t^2+t-6}$

22 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 23 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 24 $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. Үзіліссіз функциялардың қасиеттері

Бөлшек- рационал болмайтын функцияларды қарастырайық.

Мысалы:

P= $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}{x^2-9}$. Бұл $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық және x = 3 болғанда алымы мен бөлімі 0- ге тең. Бұларды есептеу техникасы мынадай: алымы мен бөлімін алымының түйіндесіне көбейту керек, яғни $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1}$. Бөлімін көбейткіштерге жіктеу керек. Мынаны аламыз:

P= $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1})(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = (қысқаша көбейту формулаларын қолданамыз)= $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x-5-x-1}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ = $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ =

= $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$ =(х–3–ке қысқартамыз да, шегін табамыз)=

$$\lim_{x\to3}\frac{2}{(x+3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}=\frac{2}{(3+3)(\sqrt{3*3-5}+\sqrt{3+1})}=\frac{2}{6(2+2)}=\frac{1}{12}.$$

Келесі мысалда бөлімінің түйіндесіне көбейту керек:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x3+7}}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{x3+7})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x3+7})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x3+7})}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{x+5-3x-7}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{-2x-2}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+4)(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+7})}{-2}=\frac{(-1+4)(\sqrt{-1+5}+\sqrt{-1*3+7})}{-2}=\frac{3(2+2)}{-2}=-6$$

Келесідей шектерді өз беттерімен есептеп көріңдер:

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; 10. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$; .11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$; 12. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

Функция үзіліссіздігі ұғымын қарастырайық. Жалпы функцияны үзіліссіз деп айтуға болады, егер оның графигін қарандашты қағаздан алмай үзбей сызуға болатын болса. Дегенмен барлығы ойдағыдай оңай емес. Мынадай функцияны қарастырайық:

$f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$. Бұл функцияның х = 1 өзгеше барлық х нақты мәндерінде мағынасы бар. Егер алымы мен бөлімін х – 1 қысқартсақ, онда сызықтық функцияны аламыз: у = х + 1. Геометриялық тұрғыда – бұл түзу сызық,бірақ бір нүктесі кірмейді:(1;5).

Анықтама. у = f (x) функциясы х = а нүктесінде *үзіліссіз* деп аталады, егер бұл нүктеде функцияның мәні және оның шегі бар болып, олар өзара тең болса, яғни: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Анықтама. Егер функция [a;b] кесіндісінің әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол бұл *кесіндіде үзіліссіз* деп аталады.

Функцияның кесіндідегі үзіліссіздігінің қасиеттерін берейік:

1) Кесіндідегі үзіліссіз функциялардың қосындысы мен көбейтіндісі үзіліссіз функцияны береді.
2) Көпмүше бұл R жиынындағы үзіліссіз функция.
3) Бөлшек- рационал функция анықталу облысында үзіліссіз.

Есептер шығару.

Функцияны үзіліссіздікке зерттеу керек.

10.3 $y=\sqrt{25-x^2}$ функциясы берілген. $x=3$ нүктесінде.

Функция үзіліссіздігінің анықтамасын қолданайық:

$$\lim_{x\to3}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

$y(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to3}\sqrt{25-x^2}=y(3)\Rightarrow$ функция $x=3$ нүктесінде үзіліссіз.

Дәл сол сияқты:

10.5 $y=\frac{2x}{1+x^2}$, $x=-1$ болғанда.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x}{1+x^2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y(-1)=\frac{2\cdot(-1)}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$\lim_{x\to -1}\frac{2x}{1+x^2}=y(-1)$ $\Rightarrow$ функция $x=-1$ нүктесінде үзіліссіз.

1. $\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{6}{9-x^2}\right)$; 2. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; 3. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$ 4. $\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$; 5. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$; 6. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$ 7. $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

Сабақ № 37. Шектер туралы теоремалар. Функцияның шексіздіктегі шегі. Екі тамаша шек

Жоспары:

1. **Шектер туралы теоремалар**
2. **Функцияның шексіздіктегі шегі**
3. **Анықталмағандықтарды ашу**
4. **Екі тамаша шек**

Теорема 1. Егер ***lim f(x)= a, lim g(x)= b, lim v(x) = c ... lim*** $\omega_{(x)}$ **= *d*** болса, онда олардың алгебралық қосындысының ақырлы шегі ақырлы болады және ол бұл шамалардың шектерінің алгебралық қосындысына тең болады. ***lim (f(x)±g(x)±v(x) ±... ± ω(x)) =a±b±c±…±d.***

Теорема 2. *lim f(x)= a, lim g(x)= b* берілсе, онда ***lim (f(x)·g(x))=a· b.***

Салдар: 1) ***lim*** $(f(x))^{\kappa}=(\lim f(x))^{\kappa}$

Теорема 3. Егер ***lim f(x)= a, lim g(x)= b*** және ***b≠0*** болса, онда ***lim f(x)/g(x) = limf(x)/lim g(x)= a/b***

Теорема 4. Егер 1) ***y→a;***

2) ***y***- теріс емес;

3) ***m***- бүтін сан, онда ***lim*** $\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{\lim y}$.

Функцияның шексіздіктегі шегі оның нүктедегі шегінің анықтамасындай анықталады.

y=f(x) функциясы ***x***- тің үлкен мәндерінде анықталсын. (яғни $x\to\infty$**)**. Тек бұл жағдайда функцияның аргументі шексіздікке ұмтылады. Ол былай жазылады:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

Жалпы функцияның шексіздіктегі шегі нүктедегі шек сияқты есептеледі. Кейбір жағдайларды қарастырайық.

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2x^2+5x}=0$

2. $\lim_{x\to\infty}(2x+3)=\infty$ Шексіздік белгісін қояды, шегі жоқ деп айтады.

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{100^{100}}{0{,}000001x+1}=0$; 4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{20000000}=\infty$; 5. $\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}1x}{0{,}345}=\infty$

Егер функция рационал- бөлшек түрінде берілсе, және алымы мен бөлімінің шегі шексіздікке ұмтылса, онда жалпы функцияның шегі айнымалының үлкен дәрежелерінің коэффициенттерінің қатынасына тең болады. Және бұл жағдайды $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығы деп атайды. Ал мұндай шектерді есептеу әдісін анықталмағандықтарды ашу деп атайды.
Мысалы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{2x^2-1} = \dfrac{1}{2}$

Жалпы жағдайда, айнымалының үлкен дәрежесін тауып, алымы мен бөлімінің әрбір мүшесін соған бөледі.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^2+5x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2+\frac{5}{x}} = \dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2}.$

Тағы да мысалдар қарастырайық:

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-7x+15}{2x^3+5x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{15}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \dfrac{4+0-0+0}{2+0+0} = 2.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^6+13x^4+8x^3+x^2+3}{2x^6+4x^3+5x} = 2{,}5$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+11x^2+x+5}{2x^4+3x^2+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}}{2+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}} = \dfrac{0+0+0+0}{2+0+0} = 0.5$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5+2x^2+3x+2}{2x^4+7x^2+1} = \dfrac{1+0+0+0}{0+0+0} = \infty.$

Мынадай шектерді есептеңдер:

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$ бұл жағдайда $(\infty-\infty)$ анықталмағандығын аламыз, оны есептеу үшін түйіндесіне көбейтіп бөлеміз:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

7. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+2}{5x^2+3x+1}$ 8. $h(x) = \dfrac{3x}{x^2+x+7}$ 9. $g(x) = \dfrac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x+3}$

10. $w(x) = \dfrac{6x^3+3x+1}{x^3+x+13}$

Сабақ № 38. Туынды, оның геометриялық және физикалық мағынасы.

Жоспары:

1. **Физикалық есеп**
2. **Геометриялық есеп**
3. **Туынды анықтамасы**
4. **Туындының физикалық және геометриялық мағынасы**
5. **Функцияның туындысын анықтау алгоритмі**

Туындының анықтамасына келмес бұрын мынадай есепті қарастырайық: материалық нүктенің сызықтық қозғалысы.

Материалық нүктенің бірқалыпты қозғалысы. М материялық нүктесі түзу сызық бойымен қозғалсын. Осы түзуде J бағытты таңдайық, бастапқы нүкте О және масштаб бірлігі t уақыт бірлігінде М материялық нүкте О нүктеден S жол жүріп өтсін, яғни жол мынадай функция болсын:

S= S(t). (1) $t\in[O,T]$

Бұл функция М нүктесінің **қозғалу заңы** деп аталады.

Материалық нүктенің қозғалыстарының ішінде ең қарапайымы бірқалыпты қозғалыс болып табылады.

Бірқалыпты сызықтық қозғалыстың жылдамдығы деп, нүктенің уақыт бірлігінде жүрген жолын атайды.

Тәжірибеде поезд, автомобиль, пароход, ұшақтар кейбір учаскелерде ғана бірқалыпты және сызықтық қозғалады.

Сондықтан бірқалыпсыз қозғалыс үшін орташа жылдамдық қолданады.

Материалық нүкте S= f(t), $t\in[O,T]$ заңы бойынша қозғалсын. Егер $S_0 = f(t_0)$ және $S_1 = f(t_1)$, онда t_0 моментінен t_1 –ге дейінгі уақыт аралығында қозғалыстың орташа жылдамдығы мынаған тең болады:

$$V_{op}=V_{op}(t_0;t_1)=\frac{S_1-S_0}{t_1-t_0}=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$$

Мұндағы $S_1 - S_0 = \Delta S$, $t_1 - t_0 = \Delta t$. (аргумент өсімшесі).

Функция өсімшесі

$V_{op}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$, Δt неғұрлым кіші болса, орташа жылдамдық нүктенің t мезгіліндегі қозғалысын дәлірек сипаттайды. Олай болса $\forall$ t мезгіліндегі жылдамдықты V деп белгілейік. Сонда V орташа жылдамдықтың $\Delta t\to 0$ шегі болады.

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_1)-f(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0-\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t};\quad (2)$$

Жанама туралы есеп.

y=f(x) функциясының $\forall$ нүктесі арқылы жанама жүргізу керек.

M(x, f(x)) нүктесі берілген.

Жарнама жүргізетін нүкте белгілі болғандықтан, жанаманың бұрыштық коэффицентін тапсақ болғаны.

x абциссасына Δx өсімше берейік. MM_1 қиюшы түзуін жүргіземіз. ΔMM_1N-нен осы $\angle$-тың tg табайық.

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{M_1N}{MN}.,\quad MN=\Delta x,\quad M_1N=f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y.$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Егер қисықтың берілген М нүктесінен өтетін жанама M_1 нүктесі қисықтың бойымен М нүктесіне жылжығандағы қиюшы болатын болса, қиюшының бұрыштық коэффиценті жанаманың $\angle$-тың коэффицентін береді.

Сонда $tg\varphi=\lim_{M_1\to M} tg\alpha$.

$$tg\varphi=\lim_{M_1-M}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{M_1-M}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}; \quad (3)$$

Қарастырылған есептер әртүрлі болғанымен олардың қорытындылары бірдей – функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі 0-ге ұмтылғандағы шегі.

Туынды анықтамасы.

$[a,b]$ кесіндісінде анықталған, $y = f(x)$ функциясын қарастырайық.

$\forall x_0 \in [a,b]$ алайық, оған Δx өсімше берейік. $x_0 + \Delta x \in [a,b]$.

Сонда функцияның да жаңа мәні табылады. $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$.

Бұдан $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын алайық.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, осы қатынастан $\Delta x \to 0$ шек алайық. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ шегі бар болса, бұл шек $y = f(x)$ функуиясының тәуелсіз айнымалы х бойынша алынған x_0 нүктедегі туындысы деп аталады.

Туынды мынадай символдармен белгіленеді:

1. Лейбниц $\frac{d_y}{d_x}$, $\frac{d(f(x))}{d_x}$.

2. Лагранж y’, f’’(x).

3. D_y, Df(x).

Туынды табу амалы дифференциалдау амалы деп аталады.

Егер $y = f(x)$ функцияның $[a,b]$ сегментінің әрбір х нүктесінде туындысы бар болса, онда $f'(x)$-тің өзі де $[a,b]$ сегментінде анықталған функция болады.

Туындының геометриялық және физикалық мағынасы.

Берілген қисықтың берілген нүктесі арқылы жүргізілген жанама туралы есепте $tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ осы формула бойынша туындыға мынадай геометриялық мағына береміз: $y = f(x)$ функцияның абсциссасы х-ке тең нүктесі арқылы жүргізілген жанаманың $\angle$-тық коэффицент функцияның туындысына тең болады. $y' = tg\varphi = k$.

Қозғалыстағы материалық нүктенің лездік V-қ туралы есепте.

$v = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ **бұл функциядан туындының физикалық мағынасын былай береміз.**

Қозғалыстағы нүктенің жылдамдығы V оның жолынан уақыт бойынша алынған туындысына тең болады. $V = S'(t)$, $v = \frac{dS}{dt}$.

$f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі туындысын табу ережесі, алгоритмі:

1. аргументке Δx өсімше беру.
2. Δx өсімшеге сәйкес функция өсімшесін, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ анықтау.
3. функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын табу, яғни $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
4. соңғы теңдіктен аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шекті анықтау: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^k(x_0)$.

1-М,

a) $f(x)=x^2$.

1. $x+\Delta x$;

2. $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2 = x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2 = 2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x+0=2x$, олай болса $f'(x)=2x$.

Сабақ № 39. Күрделі функцияны дифференциалдау

Жоспары:

1. **Күрделі функция ұғымы**
2. **Күрделі функцияның туындысын есептеу формуласы**
3. **Күрделі функцияның туындысына берілетін есептер**

Бақылау сұрақтары:

1) Функцияның туындысы дегеніміз не?
2) Функция туындысының геометриялық мағынасын ата?
3) Жанаманың теңдеуінің формуласы?
4) Функция туындысының физикалық мағынасын ата?
5) Дәрежелі функцияның туындысы?
6) Тұрақты санның туындысы неге тең?
7) Туынды табу ережелері?
8) Қосындының туындысы?
9) Көбейтіндінің туындысы?
10) Бөліндінің туындысы?

$y=f(u)$ функциясы берілген. Оның анықталу облысы $u\in U$, ал функция мәндер жиыны У болсын. Айнымалы u өз кезегінде айнымалы х-ке тәуелді функция болса, яғни $u=g(x)$ функциясы х аргументі бойынша Х жанында анықталған күрделі функция болады.

Демек, күрделі функцияның жалпы түрі: $y= f(g(x))$.

1-М, $y=\sqrt{2x+1}$ күрделі функция. $y=\sqrt{u}$, $u=2x+1$.

2-М, $y=u^2$, $u=\cos x$. $y=u^2=(\cos x)^2=\cos^2 x$.

Егер $y=f(u)$ функцияның u нүктесінде, ал $u=g(x)$ функцияның х нүктесінде туындылары бар болса, онда күрделі функцияның х аргументі бойынша туындысы бар болып, ол туынды:

$y'= f'(g(x))\cdot g'(x)$ (1) формуламен анықталады.

3-М, а) $y=(6x-13)^5$.

$u=6x-13$. $y=u^5$.

$f(u)=u^5$, $u(x)=6x-13$.

$f'(u)=5u^4$, $u'(x)=6$. (1) $\Rightarrow$ $y'=5u^4\cdot u'=5(6x-13)^4\cdot 6=30(6x-13)^4$.

ә) $y=\sqrt{1-x^3}$.

$f(u)=\sqrt{u}$, $u(x)=1-x^3$.

$f'(u)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'(x)=-3x^2$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}\cdot(-3x^2)=-\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.$$

Функциялардың туындысын табу керек:

1) $y=(2x+1)^4$
2) $y=(1-5x)^7$
3) $y=(3x-7)^{13}$
4) $y=(5x^2+6x-3)^6$
5) $y=(5x^2+6x-3)^{11}$
6) $y=\frac{1}{x+3}$
7) $y=\frac{1}{x^2-2}$
8) $y=\frac{2}{(x-4)^3}$
9) $y=\frac{3}{(x^5+3)^4}$
10) $y=\frac{3}{3x^2+3x-6}$
11) $y=\sqrt{3x-5}$
12) $y=\sqrt{7x+1}$
13) $y=\sqrt{4x-8}$
14) $y=\sqrt{x^2-3}$
15) $y=\sqrt{2x^3-x^2+5}$

Сабақ № 40. Қосынды, айырма, көбейтінді және бөліндінің туындысы

Жоспары:

1. **Функцияның туындысын есептеу ережелері**
2. **Қосынды мен айырманың туындысы**
3. **Көбейтіндінің туындысы**
4. **Бөліндінің туындысы**

Бақылау сұрақтары:

1) Функцияның негізгі қасиеттерін ата?
2) Аргумент өсімшесі дегеніміз не?
3) Функция өсімшесі дегеніміз не?
4) Функцияның нүктедегі және аралықтағы шегі дегеніміз не?
5) Функцияның туындысы дегеніміз не?
6) Туындының геометриялық мағынасы қандай?
7) Функцияның физикалық мағынасы қандай?
8) Дәрежелік ффункция дегеніміз қандай түдегі функция?
9) Дәрежелік функцияның туындысы қандай формуламен есептеледі?
10) Тұрақты санның туындысы неге тең?

Туындыны есептеудің бірнеше ережелерін қорытып шығарайық $u(x)$, $v(x)$ функцияның х нүктесіндегі мәндерін қысқаша белгілеу: $u(x)=u$, $v(x)=v$, $u'(x)=u'$, $v'(x)=v'$.

__1-ереже:__ егер u , v функцияның х нүктесіндегі u' , v' туындысы бар болса, онда $u+v$ функцияның х нүктесіндегі туындысы бар және ол $(u+v)'=u'+v'$ (1) формуламен анықталады.

__Дәлелдеуі:__ туынды анықтамасы бойынша алгоритмді қолданайық.

$u(x)+v(x)=F(x)$ алмастырайық, х-ке Δx өсімше береміз.

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x).$$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{x}$$

$$=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

1-М, $f(x)=x^2-x+5$, $f'(x)$-?

$$f'(x)=(x^2-x+5)'=(x^2)'-(x)'+(5)'=2x-1+0=2x-1.$$

Жауабы: $2x-1$.

2-ереже: Егер u , v фомуланың x нүктесінде туындылары бар болса, онда берілген функциялардың $u \cdot v$ көбейтіндісінің осы нүктесіндегі туындысы бар және ол $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ (2) формуламен анықталады.

Егер v функцияның x нүктесінде туындысы бар болып, ал $C = const$, онда $C \cdot v$ функцияның осы x нүктесіндегі туындысы бар және ол $(C \cdot v)' = C \cdot v'$. (3) формуламен анықталады.

2-М, $y = (3x^2 - 7x + 5)(2x - 3)$ функциясының туындысын табайық.

$u = 3x^2 - 7x + 5$, $v = 2x - 3$.

$u' = 6x - 7$, $v' = 2$.

$$(u \cdot v)' = (6x - 7)(2x - 3) + 2(3x^2 - 7x + 5) = 12x^2 - 18x - 14 + 21 + 6x^2 - 14x + 10 = 18x^2 - 46x + 31$$

.

3-ереже: Егер u , v функцияның x нүктесіндегі u' , v' және $v \neq 0$ бар болса, онда $\frac{u}{v}$ функцияның да x нүктесінде туындысы бар және ол $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (4)формуласы арқылы анықталады.

3-М, $ó = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ функцияның туындысын табайық.

$$y' = (\frac{x^2}{x^2 + 1}) = \frac{(x^2)'(x^2 + 1) - x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2(2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

175. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 1$; ә) $f(x) = 2x^7 + 5\sqrt{x}$;

б) $f(x) = 7x^8 - 8x^7$; в) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x \quad 7$.

176. $y = f(x)$ функциясының туындысын табыңдар:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x$; ә) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{x^4} + 2$;

б) $f(x) = x^6 - x^3 + 1$; в) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 \quad x$.

178. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысын табыңдар:

а) $f(x) = x \cdot (x + 1)$, $x_0 = 2$; ә) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = x^2 \cdot (x - 5)$, $x_0 = -2$; в) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$, $x_0 = 1$.

180. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = (2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x}) + \sqrt{x}$; ә) $f(x) = (3x - 5)(3x + 1)$;

б) $f(x) = \frac{2x + 3}{3x + 5}$; в) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}$.

181. $f(x)$ функциясының берілген нүктедегі туындысының мәнін есептеңдер:

а) $f(x) = 3x - 4x^3$, $x = 5$;

ә) $f(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^3 - 23$, $x = -1$;

б) $f(x) = (1 + 2x)(2x - 1)$, $x = 0,5$;

в) $f(x) = x^2(x - 5)$, $x = -4$;

г) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 1)$, $x_0 = 4$.

182. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$; ә) $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$; б) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$; в) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x - 1}$.

186. Функцияның туындысын табыңдар:

а) $f(x) = (4\sqrt{x} + 3)(4\sqrt{x} - 3) + 2x^2$;

ә) $f(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 4) + 2\sqrt{x}$;

б) $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 - (3x - 2)(5x + 1) - \sqrt{x}$.

187. $f'(x) < 0$ теңсіздігін шешіңдер:

а) $f(x) = \frac{3}{x} - x^3$; ә) $f(x) = x^4 - 4{,}5x^2 + 2$;

б) $f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 5$; в) $f(x) = x^4 - 4x - 3$.

188. $y = f(x)$ функциясының $x = 1$ болғандағы туындысының мәнін есептеңдер:

а) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2}$; ә) $f(x) = 3x^2 + \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{(5x+4)(x-3)}{x^2+1}$.

Сабақ № 41. Натурал көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысы. Дәрежелік функцияның туындысы.

Жоспары:

1. **Натурал көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысы**
2. **Дербес жағдайлары**
3. **Есептер шығару**

Дәрежелік функцияның туындысын есептеу формуласын берейік.

$\forall n \notin N$, $n \rangle 1$, $y = x^n$ дәрежелі функция туындысы

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (1) формуламен есептеледі.

Егер $n \in Z^-$, $n = -m$, $m \in N$.

$$(x^n)' = (x^{-m})' = (\frac{1}{x^m})' = \frac{1' \cdot x^m - (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^2 m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Яғни, $\forall n \in Z$ үшін (1) ақиқат болды.

1-М, а) $y = x^6$; ә) $y = \frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}$.

а) $y' = (x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5$.

ә)

$$y' = (\frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7})' = \frac{1}{2}(x^8)' - 3(x^{-7})' = \frac{1}{2}\cdot 8x^7 - 3\cdot(-7)x^{-7-1} = 4x^7 + 21x^{-8} = 4x^7 + \frac{21}{x^8}.$$

$\boxed{c' = 0}$ $\boxed{x' = 1}$

$\boxed{(cx)' = cx'}$ $\boxed{\left(\frac{x}{c}\right)' = \frac{x'}{c}}$

$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$ $\boxed{\left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}}$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

1. $y = x^{27}$ $\qquad y' = 27x^{26}$

2. $y = 3x^7$ $\qquad y' = 21x^6$

3. $y = \frac{1}{x^5}$ $\qquad y' = -\frac{5}{x^6}$

4. $y = \frac{4}{x^4}$ $\qquad y' = -\frac{16}{x^5}$

5. $y = \sqrt{x^7}$ $\qquad y' = \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

6. $y = \sqrt[4]{x^5}$ $\qquad y' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

7. $y = \frac{x^3}{5}$ $\qquad y' = \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{3}{5}x^{3-1} = \frac{3}{5}x^2$

8. $y = -\frac{x^8}{3}$

9. $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad y' = \left(2x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{6}{4}x^{-\frac{3}{4}-1} =$

$$-\frac{3}{2}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}}$$

10. $y = -\frac{3}{\sqrt{x^5}}$ $\qquad y' = \left(-3x^{-\frac{1}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{1}{5}-1}$

$$= \frac{3}{5}x^{-\frac{6}{5}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$$

11. $y = x^6\sqrt{x}$ $\qquad y' = \left(x^6\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{6+\frac{1}{2}}\right)' =$

$$6\frac{1}{2}x^{6\frac{1}{2}-1} = 6\frac{1}{2}x^{5\frac{1}{2}} = 6\frac{1}{2}x^5\sqrt{x}$$

12. $y = 9x^8\sqrt[5]{x^7}$ $\qquad y' = \left(9x^8\cdot x^{\frac{7}{5}}\right)' = \left(9x^{8+\frac{7}{5}}\right)' = \left(9x^{\frac{47}{5}}\right)'$

$$= 9\cdot\frac{47}{5}x^{9\frac{2}{5}-1} = \frac{423}{5}x^{8\frac{2}{5}} = 84\frac{3}{5}x^8\sqrt[5]{x^2}$$

Сабақ № 42. Көрсеткіштік және дәрежелік функциялардың туындысын есептеу
Жоспары:

1. $y = a^x$ **көрсеткіштік функция туындысы**

2. $f(x)=e^x$ **экспонента туындысы**

3. Күрделі көрсеткіштік функциялар туындысы

Бақылау сұрақтары:

1) Функцияның туындысы дегеніміз не?
2) Функция туындысының геометриялық мағынасын ата?
3) Жанаманың теңдеуінің формуласы?
4) Функция туындысының физикалық мағынасын ата?
5) Дәрежелі функцияның туындысы?
6) Тұрақты санның туындысы неге тең?
7) Туынды табу ережелері?
8) Қосындының туындысы?
9) Көбейтіндінің туындысы?
10) Бөліндінің туындысы?
11) Күрделі функцияның туындысын есептеу?

Егер де $y=a^x$, $x\in R$, $a\rangle 0$, $a\neq 1$ берілсе, онда оның туындысы $y'=(a^x)'=a^x\ln a$. Егер $f(u)=e^u$, $f(u)=a^u$. ,

$f(x)=e^x$, $x\in R$ функцияның туындысын табайық. $y'=(e^x)'=e^x$

Күрделі функциялар

$(e^u)'=e^u\cdot u'$ $\qquad$ $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$

формулалары бойынша есептеледі.

1-М, $y=e^{x^2+1}$. $y'=(e^{x^2+1})'=e^{x^2+1}\cdot(x^2+1)=e^{x^2+1}\cdot 2x=2xe^{x^2+1}$

2-М, $y=8^{x^2+x+1}$.

$y'=8^{x^2+x+1}\ln 8(x^2+x+1)=8^{x^2+x+1}\ln 8(2x+1)=(2x+1)8^{x^2+x+1}\ln 8$.

3-М, $y=(x^3+4x+16)4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}$

$$y'=(3x^2+4)4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}+(x^3 4x+16)4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\ln 4(\frac{5}{4}x^2+x+3)'=$$

$$(3x^2+4)2^{\frac{5}{2}x^2+2x+6}+(x^3+4x+16)2^{\frac{5}{2}x^2+2x+6}\ln 4(\frac{5}{2}x+1)$$

Есептер шығарту:

№1

1. $y=4^{x^2+3x-2}$
2. $y=3^{x^2}-2^x-4^{x^3+1}$
3. $y=e^{-x+1}$
4. $y=\dfrac{e^{x+1}-1}{e^{x+1}+1}$
5. $y=2^x\left(3^x+4^x\right)$
6. $y=\left(x^3+2x\right)3^{2x^2-x+3}$

№2

1) $f(x) = 3^{x^2-7x}$;   2) $f(x) = 2^{x+3x^3}$;

3) $f(x) = 0{,}8^{1\ \ x^5}$;   4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{4-x}$.

Үй тапсырмасы:
№3

1. $y = e^{x^3-3}$
2. $y = 3^{x^3} + 4^x - 2^{x^2+1}$
3. $y = e^x\left(e^{2x} + 2x\right)$
4. $y = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
5. $y = 5^{x^2+2x-3}$

Сабақ № 43. Логарифмдік функция туындысы

Жоспары:
1. **Логарифмдік функция туындысы**
2. **Дербес жағдайы**
3. **Логарифмдік функцияға байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:
1) Функцияның туындысы дегеніміз не?
2) Функция туындысының геометриялық мағынасын ата?
3) Жанаманың теңдеуінің формуласы?
4) Функция туындысының физикалық мағынасын ата?
5) Дәрежелі функцияның туындысы?
6) Тұрақты санның туындысы неге тең?
7) Туынды табу ережелері?
8) Қосындының туындысы?
9) Көбейтіндінің туындысы?
10) Бөліндінің туындысы?
11) Күрделі функцияның туындысын есептеу?
12) Көрсеткіштік функцияның туындысы неге тең?

Логарифмдік функцияның туындысы мына формуламен анықталады:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Іпе=1 болғандыктан, у = In χ функциясының туындысын табу формуласы былай аныкталады:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Күрделі функция үшін туындысы:

$(log_a u)^/ = \frac{1}{ulna} \cdot u^/$

$(lnu)^/ = \frac{1}{u} \cdot u^/$

I мысал. $y = f(x)$ функциясынын туындысын табайык:

1) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; 2) $f(x) = \ln(2 + 5x)$.

Шешуі.1) Логарифмдік функцияның туындысын табу формуласы (6) бойынша

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$$ аламыз.

2) (7) және күрделі функцияның туындысын табу формулаларын қолданамыз. Сонда

$$(\ln(2 + 5x))' = \frac{5}{2 + 5x}.$$

Есептер:

№308 *y=f(x)* функциясының туындысын табыңдар:

1) $f(x) = 3^{x^2-7x}$; 2) $f(x) = 2^{x+3x^2}$;

3) $f(x) = 0{,}8^{1-x^3}$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{4-x}$.

№310

Егер:

1) $f(x) = \log_{0,5}(2 + x)$ болса, онда $f'(1)$;

2) $f(x) = \log_3(5 + x)$ болса, онда $f'(4)$;

3) $f(x) = 0{,}2^{x-3}$ болса, онда $f'(4)$;

4) $f(x) = 2{,}5^{x-1}$ болса, онда $f'(2)$ мәндерін нөлмен салыстырыңдар.

№315

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар:

1) $f(x) = \frac{5^x}{x^2 + 1}$, $f'(1)$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $f'(e)$; 3) $f(x) = e^{-x^2}$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

№317

Егер:

1) $f(x) = \frac{x^2}{0{,}5^{1-2x}}$ болса, онда $f'(1)$;

2) $f(x) = \frac{3^{1-2x}}{x^{-4}}$ болса, онда $f'(2)$;

3) $f(x) = \ln(1{,}5 - x) - e^{x-1}$ болса, онда $f'(1)$;

4) $f(x) = \ln(2 - 3x) + x$ болса, онда $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ табыңдар.

№322

Егер:

1) $f(x) = e^{-1-x} + \ln(-e^x)$ болса, онда $f'(-1)$;

2) $f(x) = e^{1+2x}\ln(-x)$ болса, онда $f'(-0{,}5)$ мәндерін нөлмен салыстырыңдар.

Сабақ № 45. Кері тригонометриялық функциялар туындысы.

Жоспары:

1. **Тригонометриялық функциялар туындысы**
2. **Кері тригонометриялық функциялар туындысы**

Бақылау сұрақтары:

1) Функцияның туындысы дегеніміз не?
2) Функция туындысының геометриялық мағынасын ата?

3) Жанаманың теңдеуінің формуласы?
4) Функция туындысының физикалық мағынасын ата?
5) Дәрежелі функцияның туындысы?
6) Тұрақты санның туындысы неге тең?
7) Туынды табу ережелері?
8) Қосындының туындысы?
9) Көбейтіндінің туындысы?
10) Бөліндінің туындысы?
11) Күрделі функцияның туындысын есептеу?
12) Көрсеткіштік функцияның туындысы неге тең?

Тригонометриялық функциялардың туындыларын қорытып шығарайық.

1. $(\sin x)' = \cos x$.

2. Тура сол сияқты, $(\cos x)' = -\sin x$.

3. $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x - (\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Мысал қарастырайық:

1-М, $y = 3\sin x$. $y' = (3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cdot\cos x$.

2-М, $y = 7.5 - \cos 4x$.

$$y' = (7.5 - \cos 4x)' = (7.5)' - (\cos 4x)' = 0 - (\cos 4x)' = -(-\sin 4x)(4x)' = \sin 4x\cdot 4 = 4\sin 4x.$$

3-М, $y = 2\sin^2 x$, $y' = 2(\sin^2 x)' = 2(2\sin x)(\sin x)' = 2(2\sin x\cdot\cos x) = 2\sin 2x$.

4-М, $y = ctg3x - tg3x$.

$$y' = (ctg3x - tg3x)' = -\frac{1}{\sin^2 3x}(3x)' - \frac{1}{\cos^2 3x}(3x)' = -\frac{3}{\sin^2 3x} - \frac{3}{\cos^2 3x}$$

$$= -3\frac{(\cos^2 3x + \sin^2 3x)}{\sin^2 3x\cdot\cos^2 3x} = -\frac{3}{\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2 3x\cdot\cos^2 3x} = \frac{12}{\sin^2 6x}$$

Кері тригонометриялық функциялар туындыларын берейік.

$y = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$, $y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$y = \arccos x$, $x \in [-1;1]$, $y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$y = arctgx$, $x \in R$, $y' = (arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$y = arcctgx$, $x \in R$, $y' = (arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5-М, $y = arcctgx^3$, $y' = -\dfrac{1}{1+(x^3)^2}\cdot(x^3)' = -\dfrac{3x^2}{1+x^6}$.

6-М, $y = \arcsin\sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

7-М, $y=(\arccos x)^3$. $y'=3(\arccos x)^2\cdot(\arccos x)'=3(\arccos x)^2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})=-\frac{3(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Есептер:

$y=x-\operatorname{arctg} x$. $y=\arcsin\frac{x}{b}$.

$y=\arcsin 3ax$. $y=\arccos(1-2x)$.

$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$. $y=\arcsin x+\sqrt{1+x^2}$.

$y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$. $y=\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}$.

Тригонометриялық функциялардың туындысын табыңдар **(224—227)**:

224. а) $f(x)=\sin x-\cos x$; ә) $f(x)=\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x$;

б) $f(x)=4x-\sin x$; в) $f(x)=6\cos x-1{,}2x$.

225. а) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; ә) $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

б) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$; в) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

228. $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысының мәнін табыңдар:

а) $f(x)=\sin x-\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; ә) $f(x)=3\sin x+2\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

б) $f(x)=\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{ctg} x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$; в) $f(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

229. $f'(x)=0$ теңдеуін шешіңдер:

а) $f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$; ә) $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$;

б) $f(x)=\sqrt{3}x-\operatorname{tg} x$; в) $f(x)=\operatorname{ctg} x+x$.

1 – нұсқа

1. Берілген функциялардың туындысын табыңдар:

а) $f(x)=\frac{3x^2-1}{x+1}$; ә) $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$;

2. Күрделі функцияның туындысын табу керек:

а) $y=\sqrt{x^2-3}$ ә) $y=\frac{2}{(x-4)^3}$

3. Тригонометриялық функцияның туындысын табыңдар:

$f(x)=-\sin 2x-\cos 2x$;

$f(x)=x^3-\operatorname{tg} 4x$;

2 – нұсқа

1. Берілген функциялардың туындысын табыңдар:

а) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2}$; ә) $f(x)=\frac{x^2+4}{2x-1}$.

2. Күрделі функцияның туындысын табу керек:

$y=\sqrt{2x^3-x^2+5}$ $y=\frac{3}{(x^5+3)^4}$

3. Тригонометриялық функцияның туындысын табыңдар:

$f(x) = x^2 + 2\cos x;$
$f(x) = 2\,\mathrm{ctg}\,3x + 0{,}5x^4.$

Сабақ № 46. II ретті туынды және оның физикалық мағынасы

Жоспары:

1. **Екінші ретті туынды ұғымы**
2. **Екінші ретті туындының физикалық мағынасы**

$y = f(x)$ функциясы беріліп, $y' = f'(x)$ туындысы бар болса, (a, b) аралығында ол туындыны бірінші ретті туынды деп атайды.

Егер $g(x) = f'(x)$ десек, $x \in (a,b)$. Егер $g(x)$ функцияның $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде туындысы бар болса, оны $f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі 2-ші ретті туындысы деп аталады да, $f''(x)$ деп белгілейді. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ десек, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Яғни, II-ші ретті туынды – ол I-ші ретті туындыдан алынған туынды, яғни:

$y'' = (y')'$ немесе, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$f'''(x)$ туындысын IIIретті туынды деп атайды.

$f^n(x)$.... n-ші ретті туынды деп аталады.

1-М, $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

$f'(x) = (x^3 + 3x^2 + 1)' = 3x^2 + 6x$.

$f''(x) = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$.

$f'''(x) = (6x + 6)' = 6$.

2-М, $y = x\ln x$. $f'(x) = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f''(x) = (\ln x + 1)' = \dfrac{1}{x} + 0 = \dfrac{1}{x}$. $f'''(x) = (\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$.

II-ші ретті туындының физикалық мағынасы.

Материялық нүкте туралы есепті еске түсірейік. Материялық нүкте сызықтық қозғалсын, $S = S(t)$, $t \in [O;T]$ қозғалу заңы болсын. Онда $v(t)$ жылдамдық мынаған тең болады:

$v(t) = S'(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}$.

$v(t)$ қозғалыс жылдамдығы уақыт формулысы болып табылады. Сондықтан жылдамдықтың өзгеру жылдамдығын қарастыруға болады.

$v'(t) = (S'(t))' = S''(t)$.

Яғни өзгеру жылдамдығын нүктенің үдеуі деп атауға болды. Яғни $S''(t) = a(t)$ 2-ші ретті туынды үдеуді береді.

Демек, {æûë } t мезетіндегі қозғалыс үдеуі $a(t)$ $v(t)$ жылдамдықтан алынған туындыға немесе жолдан алынған 2-ші ретті туындыға тең.

$a(t) = v'(t) = S''(t)$

3-М, сызықтық қозғалыс жылдамдығы $v(t) = 5 + 3t + 6t^2$ (м/с) заңы бойынша өзгерсін. $t = 2c$ мезетіндегі үдеуін табу керек.

$a(t) = v'(t)$, $\Rightarrow a(t) = (5 + 3t + 6t^2)' = 3 + 12t$. (м/с^2)

$a(2) = 3 + 12 * 2 = 27$ (м/с^2).

Есептер шығарту:

Екінші ретті туындысын табу керек:

№1

$y = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3.$ $\qquad$ $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 9.$

$y = (2x^3 - 3)(2x^3 - 1).$ $\qquad$ $y = \frac{2}{n+1}x^{n+1}.$

№2

а) $y = x^3 + 4x$; б) $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x$; в) $y = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 12x - 14.$

а) $y = x^4 - 2x^3 - 2x^2$; б) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; в) $y = (x-1)^3(x-2)^2.$

Сабақ № 47. Функцияның өсу, кему белгілері

Жоспары:

1. **Функцияның өсу, кему белгілері**
2. **Функцияның өсу, кему аралығын табуу алгоритмі**

Бул тақырыпты игере отырып, функцияның өсу және кему белгілерімен танысып, туындының көмегімен функцияның өсу мен кему аралықтарын табу дағдыларын меңгересіңдер.

Функцияның графигі оның геометриялық кескіні болып табылатынын және графиктің координаталар жазықтығында *(x; y)* нүктелер жиынынан тұратын қисық екенін білеміз. Өспелі жене кемімелі функциялардың аныктамаларын колданып, графиктер бойынша оның бірсарынды өспелі және бірсарынды кемімелі аралыктарын анықтауды үйрендік. Енді кез келген функцияның өсу және кему аралыктарын туындының көмегімен табу жолын қарастырамыз.

Ол үшін алдымен функцияның аралықтағы өсуі мен кемуінің жеткілікті шарттарын берейік.

Теорема. *Егер дифференциалданатын f(x) функциясының туындысы X аралыгының әрбір нуктесінде оң таңбалы, ягни f(x) > 0 болса, онда ол сол аралықта өспелі болады*

Теорема. *Егер дифференциалданатын f(x) функциясының туындысы X аралыгының әрбір нуктесінде теріс таңбалы, ягни f'{x) < 0 болса, онда функция сол аралықта кемімелі болады.*

Туындының көмегімен кез келген дифференциалданатын f(x) функциясының өсу және кему аралықтарын анықтауға болады. Ол келесі алгоритм негізінде орындалады:

1) функцияның аныкталу облысын табу;

2) функцияның туындысын есептеу;

3) *f'{x) > 0 немесе f\x) < 0 теңсіздігін шешу;*

4) берілген теорема бойынша функцияның өсу және кему аралықтарын жазу.

Ескерту. Егер *f(x)* функциясы аралықтың шеткі нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол нүкте сол аралыққа енгізіледі.

Мысалдар карастырайық.

1 *-мысал.* $f(x) = 3x^2 - 12x$ функциясының өөсу және кему аралыктарын табайық.

Шешуі

1) функцияның аныкталу облысы барлық нақты сандар жиыны;

2) $f'(x) = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12;$

3) $f'(x) > 0$, **ягни** $6x - 12 > 0,\ 6x > 12,\ x > 2.$ *Ал аныкталу облсының x < 2 бөлігінде f(x) < 0 болатыны айқын;*

4) сонда теорема бойынша функция [2; +∞) аралығында өседі, ал (-∞; 2] аралығында кемиді.

Жауабы: (-∞; 2] — кемиді, [2; +∞) — өседі.

2-мысал. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ функциясының өсу және кему аралығын анықтайык.

/

$$1)\ D(f) = R;\quad 2)\ f'(x) = \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - 4x + 2\right)' = x^2 - 4.$$

Шешуі.

$f'(x) > 0$, $x^2 - 4 > 0$. Шыккан теңсіздікті интервалдар әдісімен шешеміз. Сонда $x^2 - 4 = 0$, $x_{12} = \pm 2$. Функцияның анықталу облысын үш интервалға бөліп, Әркайсысының таңбасын анықтаймыз. Ол үшін = 3 деп алып, функцияның таңбасын аныктаймыз. $f(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$, ягни $x > 2$ болғанда, $f'(x) > 0$. Енді интервалдардагы туындының таңбасын сан түзуіне кезекпен қоямыз (54-сурет).

54-сурет

Демек, [-∞ ; -2] және [2; +∞) аралығында функция өседі, ал [-2; 2] аралығында функция кемиді.

Жауабы: (-∞; -2] және [2; +∞) аралығында өседі, [-2; 2] аралығында кемиді.

258. $y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $f(x) = 3x - 1$;   ә) $f(x) = 1{,}5 - 2x$;

б) $f(x) = x^2 - 6x + 5$;   в) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$.

259. Берілген функцияның анықталу облысында өспелі екенін дәлелдеңдер:

а) $y = \frac{1}{6} + 2{,}3x$; ә) $y = \frac{1}{3}x^3 + 0{,}7$; б) $y = -\frac{7}{x}$; в) $y = 5 - \frac{3}{x}$.

260. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысында кемімелі болатынын дәлелдеңдер:

а) $y = \frac{4}{7} - \frac{3}{5}x$; ә) $y = 2 - \frac{2}{3}x^3$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = 0{,}5 + \frac{4}{x}$.

261. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $y = 15 - 2x - x^2$;   ә) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$;

б) $y = x^2 - 6x$;   в) $y = 0{,}25x^4 - 0{,}5x^2 - 1$.

262. $y = f(x)$ функциясының өспелі функция екенін дәлелдеңдер:

а) $y = \frac{x-1}{x+1}$;   ә) $y = \frac{x}{x+2}$.

263. $y = f(x)$ функциясының өсу және кему аралықтарын анықтаңдар:

а) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 7x + 1$;   ә) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$;

б) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1} + x$;   в) $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x} + 2$.

264. Функцияның өсу және кему аралықтарын табыңдар:

а) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$; ә) $y = \frac{x^4}{4} - x + 5$;

б) $y = \frac{1}{-x^2 + x + 2}$; в) $y = x^5 - 5x + 4$.

265. Барлық нақты сандар жиынында $f(x)$ өспелі функция, ал $g(x)$ кемімелі функция болатынын дәлелдеңдер:

а) $f(x) = x^5 - 1{,}5$; ә) $g(x) = -4 - \frac{2}{3}x^3$;

б) $f(x) = 5x - \cos 2x$; в) $g(x) = \operatorname{ctg} 5x - 3$.

Сабақ № 48. Функция экстремумы.Функцияның экстремумға I және II ретті туынды арқылы зерттеу

Жоспары:

1. **Функцияның экстремумы ұғымы**
2. **I ретті туынды арқылы функцияны экстремумға зерттеу.**
3. **II ретті туынды арқылы функцияны экстремумға зерттеу.**

Бақылау сұрақтары:

1. Функцияның туындысы дегеніміз не?
2. I – ші және II – ші ретті туындылар дегеніміз не?
3. Функцияның өсу – кему аралықтары дегеніміз не?
4. Функцияның өсу – кему аралықтарын туынды арқылы табу ережесі?
5. Өсу – кему аралықтарын табу алгоритмі?

I ретті туынды арқылы функцияны экстремумға зерттеу.

Сындық нүктелер ғана экстремум нүктелері бола алады.

Т: Егер $f(x)$ функцияның x_0 экстремум нүктесі болып және осы нүктенің аймағында $f'(x)$ туындысы бар болса, онда ол туынды x_0 нүктесінде 0-ге тең, яғни $f'(x_0) = 0$

Бірақ осы *th* -ға кері *th* дұрыс бола бермейді, яғни әрбір кризистік нүкте экстремум нүктесі бола бермейді.

1-М, $y = x^3 - 1$ функциясын алайық.

Бұл функцияның $f'(x) = 3x^2$ үшін $f'(0) = 3*0 = 0$. Бірақ $x = 0$ нүктесі оның экстремумды болмайтынын графикпен көруге болады.

Енді кризистік нүктенің экстремум болуының жеткілікті шартын берейік, яғни қай уақытта кризистік нүкте экстремум болады.

Т: Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз, ал $(a; x_0)$ аралығында $f'(x)\rangle 0$ $(f'(x)\langle 0)$ және $(x_0; b_0)$ аралығында $f'(x)\langle 0$ $(f'(x)\rangle 0) \Rightarrow x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның экстремум (минимум) нүктесі болады.

Яғни егер x_0 аймағында туынды таңбасы «+»-тен «-»-қа ауысса, онда x_0 нүктесі максимум болады. Кері жағдай минимум деп аталады.

Енді функцияның экстремум нүктесін табу алгоритмін берейік:

1) функцияның туындысын табу $f'(x)$.
2) Кризистік нүктелерін табу $f'(x) = 0$.
3) Кризистік нүктелер аймағында $f'(x)$ таңбасын интервалдар әдісімен анықтау.
4) Экстремум нүктесінің бар болуының жеткілікті шартын қолдану.

2-М, $y(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$ функциясының экстремум нүктелерін табу керек.

1. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

2. $6x^2-2x-4=0$.

$3x^2-x-2=0$.

$D=(-1)^2-4*(-2)*3=1+24=25$. $\qquad x=\dfrac{1\pm 5}{6}$; $x_1=-\dfrac{2}{3}$; $x_2=1$.

3. $x_1=-\dfrac{2}{3}$; $x_2=1$. $\qquad f'(0)=6*0^2-2*0-4=-4$.

Сондықтан

4. $x_{\max}=-\dfrac{2}{3}$ - максимум.

$x_{\min}=1$ - минимум.

Жауабы: $x_{\max}=-\dfrac{2}{3}$; $x_{\min}=1$.

ІІ-ші ретті туынды арқылы функцияны экстремумға зерттеу.

Т: Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің аймағында анықталса және оның $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ бар болса, онда x_0 нүктесінде $f(x)$ функцияның экстремум нүктесі бар, және егер $f''(x_0)\langle 0$, онда x_0 максимум нүктесі, егер $f''(x_0)\rangle 0$, онда минимум нүктесі болады.

Енді осы теореманы біле тұрып, функцияның экстремум нүктелерін табу ережелеріне тоқталайық..

1. функцияның кризистік нүктелерін табу керек. $f'(x)=0 \vee f'(x)$ жоқ.
2. өсу, кему аралықтарын анықтау.
3. ІІ-ші ретті туындыны анықтаймыз, оның нүктедегі мәндерін есептейміз.

1-М, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-3)$, $x\in R$. $\quad f'(x)=\dfrac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}$; $\quad f'(x)=0$, $x=\dfrac{6}{5}$ болса, $f'(x)$ болмайды,

$x=0$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{6}{5}$. $\quad (-\infty;0)\uparrow x_{\max}=0$; $\left(0;\dfrac{6}{5}\right)\downarrow$; $\left(\dfrac{6}{5};+\infty\right)\uparrow x_{\min}=\dfrac{6}{5}$.

2-М, $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+5$.

1. $f'(x)=x^3-4x=x(x^2-4)$

$x(x^2-4)=0$, $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=2$.

2. $f''(x)=3x^2-4$. $\quad f''(-2)=8\rangle 0$; $\quad f''(0)=-4<0$; $\quad f''(2)=8>0$.

Яғни,

а) $x=-2$ минимум, $f(-2)=1$, себебі $f''(-2)>0$.

б) $x=0$ максимум, $f(0)=5$, $f''(0)<0$.

в) $x=2$ минимум, $f(2)=1$, $f''(2)>0$.

268. а) $f(x)=2x^2-3x+1$; $\qquad$ ә) $f(x)=x^2-2x+\dfrac{3}{4}$.

269. а) $f(x)=-3x^2+13x-12$; $\qquad$ ә) $f(x)=4-8x-5x^2$.

270. а) $f(x)=x^2-4x$; $\qquad$ ә) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x+5$.

272. Функцияның сындық нүктелерін тауып, олардың қайсысы минимум, қайсысы максимум нүктелері болатынын анықтаңдар:

а) $f(x) = x^2 + 2x + 3$; ә) $f(x) = 2x^3 + x^2$;

б) $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 6$; в) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

273. а) $f(x) = -2x^3$; ә) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясының экстремум нүктелері болмайтынын дәлелдеңдер.

274. Функцияның максимум және минимум нүктелерін табыңдар:

а) $f(x) = 1 + 3x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$; ә) $f(x) = 16x^3 - 15x^2 - 18x + 6$;

б) $f(x) = \sin x + x$; в) $f(x) = x + 2\cos x$.

275. $f(x)$ функциясының сындық нүктелерін анықтаңдар. Экстремумы бар болса, онда максимумы мен минимумын көрсетіңдер:

а) $f(x) = \frac{2x+3}{5x+1}$; ә) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$; в) $f(x) = |x^2 + 1|$.

276. Функцияның сындық нүктелерін табыңдар. Олардың қайсысы максимум нүктелері, ал қайсысы минимум нүктелері болатынын анықтаңдар:

а) $f(x) = x^3 - 2x + 6$; ә) $f(x) = 7 - 6x - 3x^2$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; в) $f(x) = 3 + 4x^2 - x^4$.

280. Функцияның экстремум нүктелерін анықтаңдар:

а) $f(x) = \frac{4}{x^2} - x$; ә) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$;

б) $f(x) = \sin x + \cos x - x$; в) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Сабақ № 49. Функция графигінің дөңес, ойыстығы. Иілу нүктесі

Жоспары:

1. **Функция графигінің ойыс, дөңестігі**
2. **Функцияның иілу нүктесі**
3. **Функция графигінің ойыс, дөңестігін, иілу нүктесін анықтау алгоритмі**

Бақылау сұрақтары:

1. Функцияның туындысы дегеніміз не?
2. І – ші және ІІ – ші ретті туындылар дегеніміз не?
3. Функцияның өсу – кему аралықтары дегеніміз не?
4. Функцияның өсу – кему аралықтарын туынды арқылы табу ережесі?
5. Өсу – кему аралықтарын табу алгоритмі?
6. Функцияның экстермум нүктелері дегеніміз не?
7. Функцияның сындық нүктелері дегеніміз не?
8. Функцияның максимум – минимум нүктелерін анықтау алгоритмі?
9. Анықтау жолдары?
10. ІІ – ші ретті туынды арқылы анықтау алгоритмі?

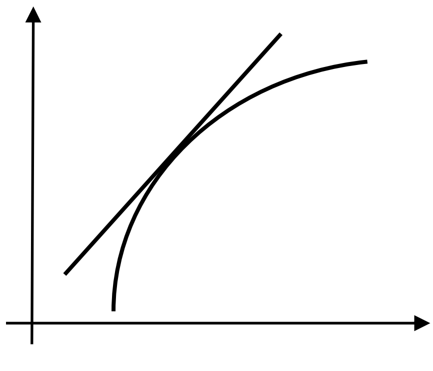
Берілген суретте функциялардың графиктері әр түрлі болып тұр. Біреуін $[a,b]$ кесіндісінде дөңес, екіншінің графигі ойыс болып тұр.

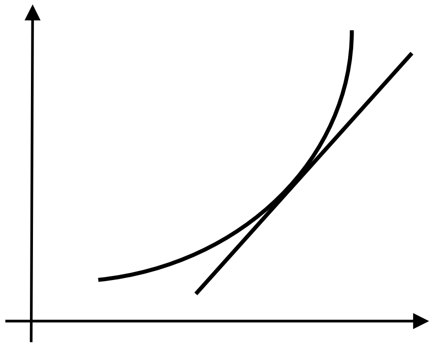
Енді осының анықтамасын берейік.

Егер үзіліссіз дифференциалданатын $f(x)$, $x \in (a,b)$ функцияның $f'(x)$ (a,b) аралығында кемісе, онда функцияның графигі дөңес деп аталады, егер $f'(x)\uparrow$, онда функцияның графигі ойыс деп аталады.

Функцияның дөңес, ойыстығын анықтау үшін мына th -ларды қолданамыз.

Т: $f(x)$, $x \in (a,b)$ функциясының I-ші және II-ші ретті функциясы бар болсын. Онда, егер $f''(x) < 0$, $\forall\ x \in (a,b)$, онда (a,b) интервалында $f(x)$ функциясы дөңес, егер $f''(x) > 0$, онда ойыс болады.





Функция графигінің дөңес, ойыстығын анықтау үшін:

1. $f''(x) = 0$ теңдеуін шешу, яғни түбірлері II-ші ретті туынды бойынша кризистік нүктелер деп аталады.

2. $f''(x) \rangle 0$, $f''(x) \langle 0$ болатын аралықтарын анықтау.

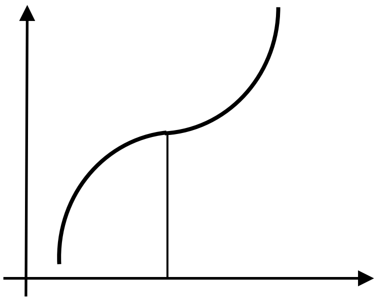
1-М, $f(x) = x^3$ функцияның дөңес, ойыс интервалдарын анықтау.

$f'(x) = 3x^2$. $f''(x) = 6x$. $6x = 0$, $x = 0$, яғни бір нүкте бар.

Ол сан осін $(-\infty;0)$ және $(0;+\infty)$ бөледі.

$f''(x) \rangle 0$, $\forall x > 0$ және $f''(x) \langle 0$, $x < 0$,

$(-\infty;0)$ функция графигі дөңес; $(0;+\infty)$ функция графигі ойыс.



Иілу нүктесі деген ұғымды анықтайық.

Осы мысалдан, $x = 0$ нүктесінде $f(x) = x^3$ функцияның графигі дөңестіктен ойыстыққа ауысады.

Анықтама: $f(x)$ функциясы (a,b) интервалындағы анықталуы үзіліссіз болсын. $x_0 \in (a,b)$ белгілі бір оң және сол жақты маңайларында $f(x)$ функциясының дөңестігі қарама-қарсы бағытталған болса, онда $(x_0 f(x_0))$ нүктесі $f(x)$ -тің графигінің иілу нүктесі деп аталады.

Иілу нүктесін анықтау теоремасы.

$f(x)$ функциясы (a,b) интервалы анықталған, $f'(x)$, $f''(x)$ бар болсын, онда $x_0 \in (a,b)$ үшін $f''(x_0) = 0$, орындалса, $(x_0 f(x_0))$ нүктесі иілу нүктесі болады. Жеткілікті емес.

3-М, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$. $(0;1)$ нүктесі – иілу нүктесі.

$f''(x) = 12x^2 - 12x$ $(1;0)$ нүктесі – иілу нүктесі.

$12x^2 - 12x = 0$. $\quad$ $f(0) = 0^4 - 2*0^3 + 1 = 1$

$12x(x-1) = 0$. $\quad$ $(-\infty;0)$, $f''(x) > 0$; $(1;+\infty)$, $f''(0) > 0$ - ойыс.

$f''(x)$ таңбасын анықтайық. $\quad$ $(0;1)$, $f''(x) < 0$ - дөңес.

ЕСЕПТЕР:

207. $y = x^2 + 6x - 4$. ***208.*** $y = x^3 - 3x^2 + 7$.

209. $y = x^2 + 4x - 6$. ***210.*** $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 270$.

211. $f(x) = \frac{3}{x}$ ***212.*** $f(x) = 8x^2 - x$ ***213.*** $y = e^{-x}$

240. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. **241.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.

242. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. **243.** $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$.

244*. $y = \frac{x}{x^2 + 16}$. **245.** $y = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$.

246*. $y = 2x + 3e^{-x}$. **247.** $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 9}$.

248. $y = (x-1)(x+3)$. **249.** $y = \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$.

Сабақ № 50. Функцияның аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндері. Функцияның минимумы мен максимумына арналған есептер

Жоспары:

1. **Функцияның аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндері.**
2. **Функцияның минимумы мен максимумына арналған есептер**

Тәжірибеде функцияның берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есептері жиі кездеседі. Функцияның осындай мәндерін табу туынды қолдану арқылы шығару жолдарын қарастырамыз.

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталған, үзіліссіз, оның осы кесіндісінде туындысы бар болсын.

Бұл мәндерді анықтау үшін мына алгоритмді қолданамыз.

1. $f'(x)$
2. $f'(x) = 0$
3. сындық нүктелерін анықтау.
4. кесіндінің шеткі нүктелерінің, аралыққа тиісті сындық нүктелерінің, функцияның мәнін есептеу.
5. оларды салыстыра отырып, ең үлкен және ең кіші мәндерін анықтау.

1-М, $f(x) = 2x^3 - x^2$ функцияның $[-1;1]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табайық.

1. $f'(x) = 6x^2 - 2x$.
2. $6x^2 - 2x = 0$. $2x(3x-1) = 0$. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$.
3. $0 \in [-1;1]$, $\frac{1}{3} \in [-1;1]$
4. $x = 0;\ \frac{1}{3};-1;1$ нүктелеріндегі мәндерін есептейміз.

$f(0) = 2*0^3 - 0^2 = 0$

$f(\frac{1}{3}) = 2*\frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{27}$; $f(1) = 2*1^3 - 1^2 = 1$; $f(-1) = 2*(-1)^3 - (-1)^2 = -3$.

5. Сонымен, $f(-1) = -3; f(0) = 0; f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}; f(1) = 1$.

Функцияның ең кіші мәні $f(-1) = -3$, ең үлкен мәні $f(1) = 1$. $M = 1, m = -3$.

Жауабы: 1; -3.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін есептеу практикалық есептерді шығару кезінде қажет. Осы жағдайда үзіліссіз функциялар мына қасиетке ие болады: үзіліссіз функциялардың берілген аралықта бір ғана экстремумы болса, онда функция не ең кіші мәнге, не ең үлкен мәнге ие болады.

2-М, Қабырғасы а болатын квадрат қаңылтырдан табаны квадрат болып келген ең үлкен көлемді жәшік дайындау үшін кесілген квадраттың қабырғасының ұзындығы қандай болу керек.

Шешуі: Бүктеген кезде қаңылтырдан ең үлкен көлемді жәшік дайындау үшін бұрыштарынан бірдей квадрат қиып алу керек.

Қиып алынатын квадрат қабырғасының ұзындығын х деп белгілейміз.

Сонда жәшіктің табанының қабырғасы $a - 2x$ болады. Онда жәшіктің көлемі $V(x) = (a-2x)^2 * x = (a^2 - 4ax + 4x^2) * x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, мұндағы $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$.

Енді $\left[0; \frac{a}{2}\right]$ кесіндісіндегі $V(x)$ функцияның ең үлкен мәнін табамыз.

$V'(x) = (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)' = a^2 - 8ax + 12x^2$.

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$ бұдан, $x_1 = \frac{a}{6}, x_2 = \frac{a}{2}$.

Берілген кесіндіге тиісті сындық нүктелерді анықтаймыз,

$\frac{a}{6} \in \left[0; \frac{a}{2}\right], \frac{a}{2} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. $x = 0, x = \frac{a}{6}, x = \frac{a}{2}$ нүктесіндегі $V(x)$-тің мәндерін есептейміз:

$V(0) = 0, V(\frac{a}{6}) = \frac{2a^3}{27}, V(\frac{a}{2}) = 0$.

Сонымен, қиып алатын квадраттың қабырғасының ұзындығы $\frac{a}{6}$-ға тең болса, жәшік ең үлкен көлемге ие болады.

3-М, Периметрі 2р болатын тіктөртбұрыштардың ішінде ең үлкен ауданға ие болатын тіктөртбұрышты табу керек.

Шешуі: Периметрі 2р болатын тіктөртбұрыштардың саны шексіз көп. Біз бұлардың ішінде ең үлкенін табу керекпіз.

Егер ізделінді тіктөртбұрыш ұзындығын х деп белгілесек, онда оның ені р-х болады. Ал ауданы $S = x(p - x)$.

Функцияның сындық нүктелерін табайық.

$S = (p - x)x, x \in [0; p]$. $S' = p - 2x, p - 2x = 0$.

$x = \frac{p}{2}$, $\frac{p}{2} \in [0; p]$. $x_{max} = \frac{p}{2}$. $S(\frac{p}{2}) = (p - \frac{p}{2}) * \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$.

Яғни, $S(\frac{p}{2}) = \frac{p^2}{4}$ ең үлкен мәні.

Жауабы: Периметрі 2р болатын тіктөртбұрыштар ішінде ең үлкен ауданға ие болатын қабырғалары $\frac{p}{2}$ болатын квадрат.

$y = f(x)$ функциясының көрсетілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар (300—303):

№300 а) $f(x) = 4x + 5$, [-1; 2]; ә) $fix) = 3 - 2x$, [-2; 1].

№301 а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, [-5; ә) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, [0; 3].

№302 а) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, [-3; 0];

ә) $f(x) = x^2 + 3x + 1$, [2; 4].

№303 а) $fix) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 1$, [-2; 1];

ә) $fix) = x^3 + 12x^2 + 45x + 20$, [-4; -2].

№305 а) 9 санын олардың көбейтіндісі ең үлкен сан болатындай екі қосылғышка жіктеңдер;

ә) 12 санын квадраттарының косындысы ең кіші сан болатындай екі қосылғышка жіктеңдер.

№306 а) 121 санын косындысы ең кіші сан болатындай екі оң санға жіктеңдер;

ә) 144 санын косындысы ең үлкен сан болатындай екі оң көбейткішке жіктеңдер.

Көрсетілген кесіндідегі $y = f(x)$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңдар (307—310):

307. а) $f(x) = x^4 - 4x + 5$, [-3; 2]; ә) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$, [-1; 1],

308. а) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2$, [0; 3];

ә) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 30$, [-3; 3].

309. а) 147 санын қандай екі оң косылғышқа жіктегенде олардың біреуінің екіншісінің квадрат түбірімен көбейтіндісі ең үлкен болады?

ә) 32 санын қандай екі оң қосылғышка жіктегенде олардың біреуінің екіншісінің квадрат түбірімен қосындысы ең кіші болады?

310. а) Ауданы 400 га болатын тіктөртбұрыш пішінді егістік алкабын айнала ені $l = 10$ м болып келетін жолакка ағаштар отырғызылу керек. Қоршаған ағаштар алкабыньщ ауданы ең кіші болу үшін егістік алқабының сызыктық өлшемдері кандай болу керек?

ә) Кітап бетіндегі мәтіннің ауданы 363 см^2. Кітап бетінің жоғарғы және төменгі жақтарынан 2 см-ден, ал сол жағы мен оң жақтарынан 1,5 см-ден бос орындар қалдырылған. Кітап ауданы ең кіші болуы үшін оның бетінің сызыктық өлшемдері кандай болуы керек?

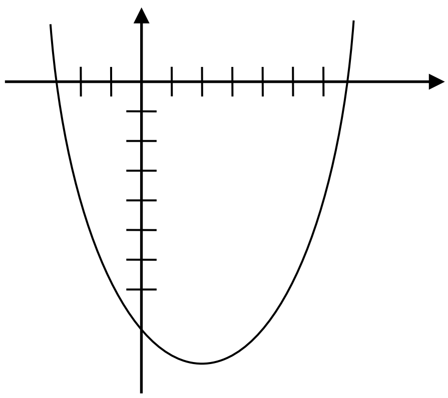
Сабақ № 51. Функцияны зерттеп, графигін салу.

Жоспары:

1. **Функция зерттеу**
2. **Функцияның графигін сызу**

Бірнеше мысал қарастырайық:

1-М, $f(x) = x^2 - 4x - 5$ функцияның графигін салу керек.



$a > 1$, $D = 36 > 0$, $x_1 = \dfrac{4+6}{2} = 5$; $x_2 = \dfrac{4-6}{2} = -1$.

1. $x \in R$.

2. O_x осімен қиылысу нүктелері:

$y = 0$, $x_1 = 5, x_2 = -1$. $\begin{cases}(5;0) \\ (0;-1)\end{cases}$ $\begin{matrix}(5;0) \\ (-1;0)\end{matrix}$

3. O_y осімен қиылысу нүктелері:

(0;-5)

$(-\infty;0), f(x) > 0$. $(-1;0), f(x < 0)$. $(0;+\infty), f(x) > 0$.

4. $f'(x) = 2x - 4$, $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

$x_{\min} = 2, f(2) = 2^2 - 4*2 - 5 = -9$.

5. $f''(x) = 2, (-\infty;+\infty), f(x)$ графигі ойыс.

2-М, $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$, $-\frac{1}{3} = a < 0$, $D = 2^2 - 4*(-\frac{1}{3})*(-3) = 4 - 4 = 0$.

1-түбірі бар. $f'(x) - \frac{2}{3}x + 2$ максимум, минимум нүктелерін анықтайық.

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0$, $x = +3$, $f(3) = -3 + 6 - 3 = 0$, $x_{\max} = 3$, $(3;0)$ - төбесі.

$f''(x) = -\frac{2}{3}$; $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ - дөңес.

$x = 0$, $f(0) = -3$.

O_y осімен $(0;-3)$ нүктесінде қиылысады.

3-М, $y = x^3 + 3x^2$

1. Анықталу облысы $x \in R$.
2. Жұп, тақтылығын анықтау.

$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2 \neq f(x)$ -жұп та емес, тақ та емес.

3. Координат осімен қиылысу нүктелері.

O_x осі: $y = 0, x^3 + 3x^2 = 0$, $x^2(x^2 + 3) = 0$, $x = 0, x = -3$. $(0;0), (0;-3)$

O_y осі: $x = 0$, $y = 0^3 + 3*0^2 = 0$ $(0;0)$

4. таңба тұрақтылығын анықтау.
5. максимум, минимум нүктелерін. Өсу, кему аралықтарын.

$f'(x) = 3x^2 + 3x$. $3x^2 + 3x = 0$. $3x(x+1) = 0$. $x_1 = 0, x_2 = -1$.

$(-\infty;-1)\uparrow, (-1;0)\downarrow, (0;1)\uparrow$.

Келесідей функцияларды зерттеп графиктерін сызыңдар:

а) $y = x^3 + 3x^2$; б) $y = x^2 + 2x$; в) $y = 2x^2 - 4$

Сабақ № 52. Функция дифференциалы және оның геометриялық мағынасы. Дифференциалды жуық есептеулерде қолдану

Жоспары:

1. **Функция дифференциалының ұғымы**
2. **Функция дифференциалының геометриялық мағынасы**
3. **Дифференциалды жуық есептеуде қолдану**

Туындының анықтамасынан $y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ екенін білеміз.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \alpha(x)$ десек, $\alpha(x)$ - функция.

$\Delta x = h$ деп алсақ, $\begin{aligned} \Delta y &= y'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x, \\ \Delta y &= y'(x)h + \alpha(x)h \end{aligned}$ (1)

$\alpha(x)h$ функцияның дәлдігі өте үлкен ақырсыз аз шама.

А: (1) теңдіктің сызықтық бөлігі <u>у функцияның дифференциалы</u> деп аталады.

$\Delta y = y'(x)h$, $\Delta y = e(h)$ десек, яғни h бойынша функция $e(h) = y'(x)h$.

Дифференциалдың мағынасы ол өсімшенің сызықтық бөлігі. Әдетте $h = dx$ деп белгілейді.

$e(h) = \Delta y = dy$, $dy = y'dx$.

Сонымен функцияның дифференциалы оның туындысын dx-ке көбейткенге тең.

Функцияның дифференциалына туындының барлық ережелері қолданылады. Дифференциалдың геометриялық мағынасы.

$tg\varphi = y'$ - туындының геометриялық мағынасы.

$$\frac{dy}{dx} = tg\varphi, \quad dy = tg\varphi * dx. \quad dy = tg\varphi\Delta x \Rightarrow \frac{Nh}{\Delta x} * \Delta x = dy.$$

Сонымен dy Δx өсімшесіне сәйкес келетін жанаманың ординатасының өсімшесі.

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциалды жуық есептеуге қолдану.

$\Delta y = y'\Delta x$ болғандықтан функцияның өсімшесін есептеу, оның туындысын есептеуге келтіріледі. Функцияның өсімшесін, оның дифференциалмен ауыстыру $f(x+\Delta x)$ мәнін есептеуге әкеледі.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x). \qquad f(x+\Delta x) - f(x) = y'\Delta x.$$

$f(x+\Delta x) = y'\Delta x + f(x)$ - жуықтап есептеу формуласы.

1-М, $\sqrt{16{,}02}$ мәнін есептеу керек.

$y = \sqrt{x}$ функциясының туындысын табайық.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \sqrt{16{,}02} = \sqrt{16+0{,}02} = |\Delta x = 0{,}02| = \frac{1}{2\sqrt{16}} * 0{,}02 + \sqrt{16} = \frac{0{,}02}{8} + 4 = 4{,}0025.$$

2-М, $y = \sqrt[m]{x}$., $m = 2,3,4,...,$ $y' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{mx}$. $\sqrt[m]{x+\Delta x} = \frac{\sqrt[m]{x}}{mx}\Delta x + \sqrt[m]{x}$.

Егер $x = 1$. $\sqrt[m]{1+\Delta x} = \frac{1}{m}\Delta x + 1$.

3-М, $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$. $(x+\Delta x)^m = mx^{m-1} * \Delta x + x^m$.

4-М, $(1{,}03)^5 = |\Delta x = 0{,}03| = 5*1^4*0{,}03 + 1^5 = 0{,}15 + 1 = 1{,}15.$

5-М, $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$; $\ln(x+\Delta x) = \frac{1}{x}\Delta x + \ln x$.

$$\lg(9) = \lg(10-1) = \frac{1}{10\ln 10} * (-1) + \lg 10 = 1 - \frac{1}{10\ln 10}.$$

6-М, $\cos 61^0$ $\quad y = \cos x, y' = -\sin x$.

246. (1) формуланың көмегімен аргументтің берілген мәндеріне сәйкес $y = f(x)$ функциясының мәндерін есептеңдер:

а) $f(x) = x^3 + 3x$, $x_1 = 1{,}998$, $x_2 = 6{,}002$;
ә) $f(x) = x^2 - x^5$, $x_1 = 3{,}03$, $x_2 = 2{,}997$;
б) $f(x) = 2x - x^4$, $x_1 = 5{,}002$, $x_2 = 3{,}995$;
в) $f(x) = 3x^2 + 2x^3$, $x_2 = 4{,}996$, $x_3 = 7{,}02$.

(2) және (3) формулаларды қолданып, өрнектің жуық мәндерін табыңдар **(247—248):**

247. а) $1{,}003^{100}$; ә) $0{,}996^{16}$; б) $0{,}997^{40}$; в) $1{,}002^{200}$.

248. а) $\sqrt{1{,}003}$; ә) $\sqrt{1{,}004}$; б) $\sqrt{4{,}008}$.

В

(1)—(3) формулаларын қолданып, өрнектің жуық мәндерін есептеңдер **(249—251):**

249. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}004\right)$; ә) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0{,}02\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 0{,}05\right)$.

250. а) $\frac{1}{1{,}002^{20}}$; ә) $\frac{1}{0{,}995^{50}}$; б) $\frac{1}{0{,}996^{5}}$.

251. а) $\sqrt{9{,}27}$; ә) $\sqrt{4{,}16}$; б) $\sqrt{16{,}32}$.

Сабақ № 53. Дифференциалды жуық есептеулерде қолдану

252. $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының x_0 нүктесіндегі жуық мәндерін салыстырыңдар:
а) $f(x) = x^2 - 4x^5$, $g(x) = x^3 - 3x^4$, $x_0 = 3{,}998$;
ә) $f(x) = \operatorname{tg} x + x$, $g(x) = \operatorname{ctg} x - x$, $x_0 = 44^\circ$.

(1)—(3) формулаларын қолданып, өрнектердің жуық мәнін есептеңдер **(253—255):**

253. а) $\sqrt{38{,}16}$; ә) $\sqrt{0{,}996}$; б) $\sqrt{49{,}99}$.

254. а) $\frac{1}{2{,}0025^4}$; ә) $\frac{1}{16{,}001^{10}}$; б) $\frac{1}{25{,}012^{20}}$.

255. а) $\cos 35^\circ$; ә) $\operatorname{tg} 46^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 87^\circ$.

Сабақ № 54. Есептер шығару.

Бақылау сұрақтары:

1. Туынды дегеніміз не?
2. Туындының функцияны зерттеуде қолданысы қандай?
3. Функцияның өсу–кему аралықтарын қалай анықтауға болады?
4. Функцияның экстремумы дегеніміз не?
5. Максимум, минимум нүктелерін қалай анықтауға болады?
6. Функция графигінің ойыс–дөңестігін қалай анықтауға болады?
7. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін қалай табуға болады?
8. Функцияның графигін туынды арқылы қалай зерттейміз?
9. Функцияның дифференциалы дегеніміз не?
10. Дифференциалдың көмегімен қандай жуық есептеулер жүргізуге болады?

Өздік жұмысы

1– нұсқа

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндрін табыңдар:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3, [-3; 0]$$

Функцияны зерттеп, графигін сызу керек:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1;$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

2– нұсқа

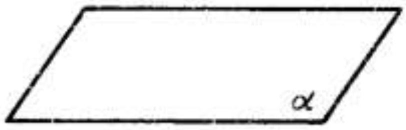
Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндрін табыңдар:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1, [2; 4]$$

Функцияны зерттеп, графигін сызу керек:

$$f(x) = -1 + 6x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3;$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$



3- нұсқа

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндрін табыңдар:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 1, [-2; 1]$$

Функцияны зерттеп, графигін сызу керек:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5;$$

$$f(x) = 2x^4 - x;$$

4- нұсқа

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндрін табыңдар:

$$f(x) = x^3 + 12x^2 + 45x + 20, [-4; -2]$$

Функцияны зерттеп, графигін сызу керек:

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3.$$

$$f(x) = x + x^3.$$

Бөлім VI Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар

Сабақ № 55. Стереометрия аксиомалары және олардың салдары

Жоспары:

1. **Стереометрия ғылымы, оның негізгі ұғымдары**
2. **Стереометрияның негізгі аксиомалары**
3. **Стереометрия аксиомаларының кейбір салдары**
4. **Жазықтықтардың берілу тәсілдері**

Бақылау сұрақтары:

1. Геометрия дегеніміз не?
2. Геометрияның негізгі бөлімдерін атаңдар?
3. Геометрияның негізгі ұғымдарын білесіңдер ме?
4. Оның негізгі аксиомалары қандай?

5. Геометрияның қолданысы қандай?

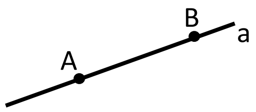
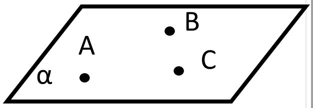
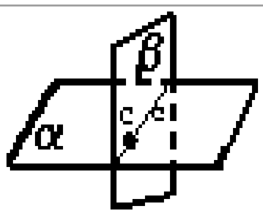
Геометрияның негізгі екі бөлімі бар:

1) Планиметрия – жазықтықтағы фигураларды зерттейтін ғылым
2) Стереометрия – кеңістіктегі фигураларды зерттейтін ғылым.

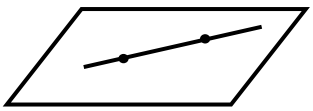
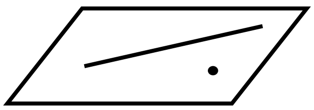
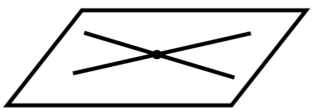
Стереометрияның негізгі ұғымдары: нүкте, түзу, жазықтық.

Жазықтық, түзу сияқты шексіз болады. Суретте оның бір бөлігін ғана кескіндейміз. Оны үстелдің беті сияқты көз алдымызға елестетіп, параллелограмм түрінде бейнелейміз. Жазықтықтарды α, β, γ, ... грек әріптерімен белгілейміз.

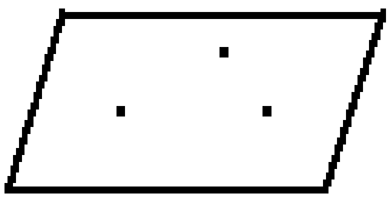
Стереометрияның негізгі аксиомаларын берейік:

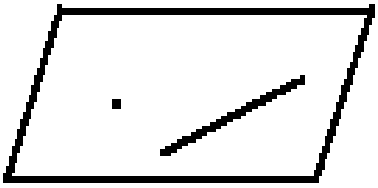
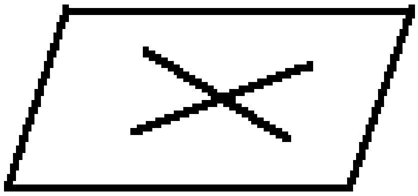
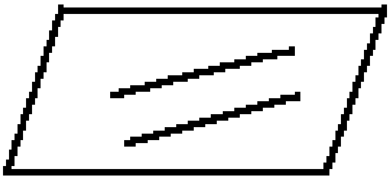
Аксиома	**Сызба**	**Жазылуы**	**Тұжырымдалуы**
А1		***A,B*** $\in$ ***a, a* - бір ғана түзу.**	Берілген екі нүкте арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.
А2		***A, B, C*** $\notin$ **бір түзуге, *A, B, C*** $\in \alpha$	Бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.
А3		$c \in \alpha; \beta$ $\alpha \cap \beta = c, C \in c$	Егер екі жазықтықтың бір ортақ нүктесі бар болса, онда олар сол нүкте жататын түзу бойымен қиылысады.

Аксиомалардың кейбір салдарлары.

	Сызба	**Тұжырымдалуы**
С 1		**Егер бір түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса,онда түзудің барлық нүктесі осы жазықтықта жатады.**
С 2		**Бір түзу және онда жатпайтын бір нүкте арқылы жазықтық өтеді және ол тек біреу ғана болады..**
С 3.		**Қиылысатын екі түзу арқылы бір жазықтық , тек бір ғана жазықтық өтеді.**

Жазықтықтардың берілу тәсілдері:

Жазықтықтардың берілу тәсілдері	**суреті**	
I. Үш нүкте бойынша		**А2**

2. Түзу және онда жатпайтын нүкте бойынша.		**Салдар 2**
3. Қиылысатын екі түзу бойынша.		**Салдар 3**
4. Параллель екі түзу бойынша.		**Параллель түзулердің анықтамасы**

Үй тапсырмасына есептер (Ауызша)

1. Бір түзудің бойында жатпайтын төрт нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?
2. Түзу және онда жатпайтын екі нүкте арқылы неше жазықтық жүргізуге болады? Үш нүкте ше?
3. Параллель үш түзу арқылы неше жазықтық жүргізуге болады?

Сабақ № 56. Түзулердің кеңістікте өзара орналасуы. Түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі

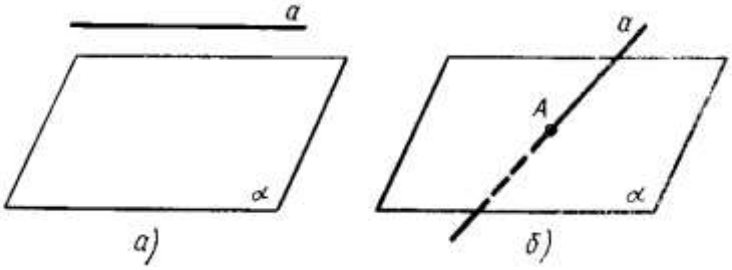
Жоспар:

1. **Түзулердің өзара орналасуы**
2. **Айқас түзулер анықтамасы**
3. **Параллель түзулердің қасиеттері**

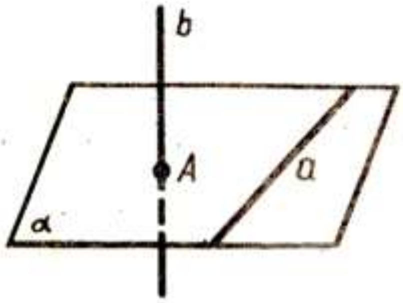
Бақылау сұрақтары:

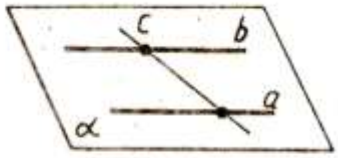
1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?

Жазықтақ пен бұл жазықтық бетінде жатпайтын түзу не қиылыспайды, не бір нүктеде қиылысады.



Кеңістіктегі екі түзу бір жазықтықта жататын болып және өзара қиылыспайтын болса, ондай екі түзу *параллель түзулер* деп аталады. Өзара қиылыспайтын және бір жазықтықта жатпайтын түзулер *айқас түзулер* деп

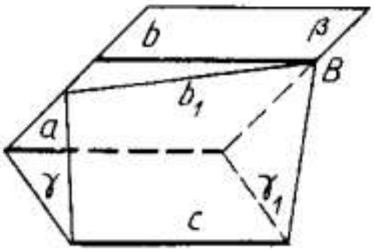


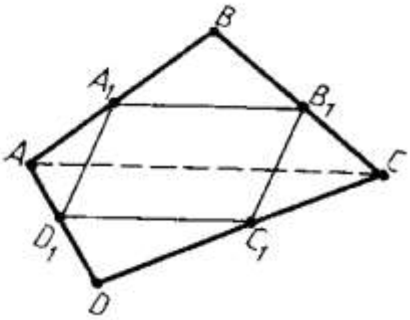


аталады (322-сурет).

Теорема 16.1. ***Берілген түзуден тыс жатқан нњһүкте арқылы сол түзуге параллель түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.***

Т е о р е м а 16.2. *Қандай да бір түзуге параллелъ болатын екі түзу өзара параллель*





болады.

Есептер:

№1.

A,B,C және D нүктелері бір жазықтықта жатқан жоқ. AB және CD түзулері қиылыспайтынын дәлелдеңдер.

№2.

A,B,C нүктелері әр түрлі екі жазықтықтың әрқайсысында да жатыр. Бұл нүктелер бір түзудің бойында жататынын дәлелдеңдер.

№3.

Төрт нүкте бір жазықтықта жатқан жоқ. Олардың қандай да бір үшеуі бір түзудің бойында жата ала мА?

№4.

Бір түзу арқылы әр түрлі екі жазықтық жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.

1. **Жазықтық пен түзудің параллельдігінің анықтамасы**
2. **Түзу мен жазықтықтың параллельдігінің белгісі**

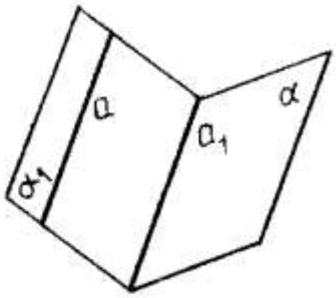
Бақылау сұрақтары:

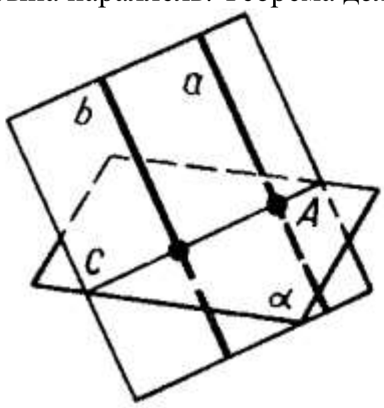
1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
5. Түзулердің өзара орналасуы?
6. Параллель түзулер дегеніміз не?
7. Айқас түзулер дегеніміз не?
8. Параллель түзулердің қасиеттері?

Түзу мен жазықтық қиылыспайтын болса, олар *параллель* деп аталады.

Т е о р е м а 16.3. *Егер жазықтыққа тиісті емес түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, ол онда сол жазықтықтың өзіне де параллель болады.*

Д ә л е л д е у. α — жазықтық, а — онда жатпайтын түзу және a^1 — α жазықтығындағы *а* түзуіне параллель түзу болсын. α және a^1 түзулері арқылы $α^1$ жазықтығын жүргіземіз (327-сурет). α және $α^1$ жазықтықтары a^1 түзуі бойымен қиылысады. Егер а түзуі α жазықтығын қиып өтетін болса, онда қиылысу нүктесі a^1 түзуіне тиісті болар еді. Бірақ бұлай болуы мүмкін емес, өйткені а және a^1 түзулері параллель. Сонымен, а түзуі α жазықтығын қиып өтпейді, демек, ол α жазықтығына параллель. Теорема дәлелденді.





Есептер:

№1. Берілген параллель екі түзуді қиып өтетін барлық түзулердің бір жазықтықта жататынын дәлелдеңдер.

№2. AB кесіндісінің ұштары мен оның M ортасы арқылы параллель түзулер жүргізілген, олар қандай да бір жазықтықты A_1, B_1 және M_1 нүктелерінде қиып өтеді. AB кесіндісі жазықтықты қимайды деп алып, MM_1 кесіндісінің ұзындығын тау керек: 1) AA_1=5м, BB_1=7м, 2) AA_1=3,6дм, BB_1=4,8дм, 3) AA_1=8,3см, BB_1=4,1см.

№3. AB кесіндісінің A ұшы арқылы жазықтық жүргізілген. Осы кесіндінің B ұшы және C нүктесі арқылы жазықтықты B_1 және C_1 нүктелерінде қиятындай параллель түзулер жүргізілген. BB_1 кесіндісінің ұзындығын табу керек: 1) CC_1=15см,AC: BC=2:3, 2) CC_1=8,1см,AB: AC=11:9, 3) AB=6см,AC: CC_1=2:5.

Үй тапсырмасына: №2 және №3 (3)

Сабақ № 57. Жазықтықтардың параллельдігі

Жоспар:

1. **Параллель жазықтықтар анықтамасы**
2. **Параллель жазықтықтардың қасиеттері**

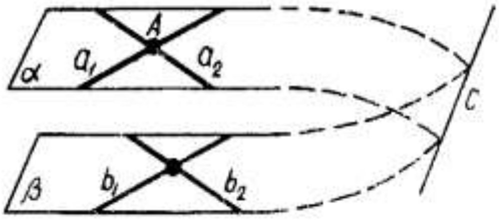
Бақылау сұрақтары:

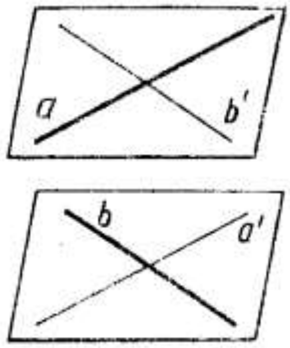
1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
5. Түзулердің өзара орналасуы?
6. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы?
7. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі?

Егер екі жазықтық қиылыспайтын болса, олар параллель жазықтықтар деп аталады.

Теорема: Егер екі жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзу екінші жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзуге сәйкесінше параллель болса, онда ол екі жазықтық параллель болады.

Дәлелдеу. α мен β – берілген жазықтықтар, a_1 мен a_2 – α жазықтығында жатқан, A нүктесінде қиылысатын екі түзу, b_1 мен b_2 – β жазықтығында жататын, a_1 мен a_2 –ге сәйкесінше параллель түзулер болсын. α мен β параллель емес, қандай да бір с түзуінің бойымен қиылыссын деп алайық. Теорема бойынша a_1 мен a_2 түзулері b_1 мен b_2 түзулеріне параллель болғандықтан β жазықтығына параллель. Демек, олар осы жазықтықтағы с түзуін қимайды. Бұдан α жазықтығындағы екі түзу с түзуіне параллель болып шығады, ал парелледьдер аксиомасы бойынша бұл мүмкін емес. Біз қарама – қайшылыққа келдік. Теорема дәлелденді.



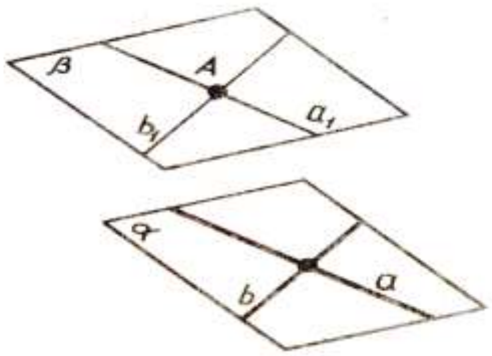


Теорема: Берілген жазықтықтан тыс нүкте арқылы берілген жазықтыққа параллель жазықтық жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады. (Дәлелдеусіз қабылдаймыз)

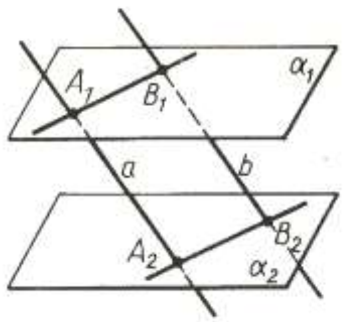
Параллель жазықтықтардың қасиеттері:

1. Егер параллель екі жазықтықты үшінші жазықтық қиятын болса, онда қиылысу түзулері параллель болады.

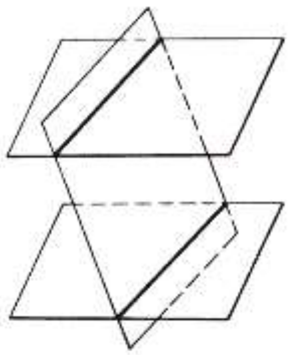
2. Параллель екі жазықтықтың арасындағы параллель түзулердің кесінділері тең болады.



1 – сурет



2 – сурет



3 – сурет

Есептер:

№1. Параллель екі жазықтық ABC үшбұрышының AB қабырғасын D және D_1 нүктелерінде, ал BC қабырғасын сәйкесінше E және E_1 нүктелерінде қиып өтеді. DE кесіндісінің ұзындығын табыңдар. Мұндағы BD=12 см, BD_1=18см, D_1E_1=54см.

№2. Бір жазықтықта жатқан ABC үшбұрышының төбелері арқылы екінші жазықтықты A_1, B_1, C_1 нүктелерінде қиып өтетін параллель түзулер жүргізілген. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштары тең екенін дәлелдеңдер.

Сабақ: № 58. Параллель проекция және оның қасиеттері

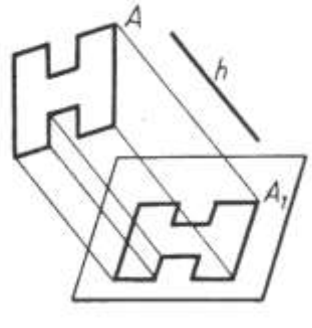
Жоспары:

1. **Параллель проекция ұғымы**
2. **Параллель проекция қасиеттері**

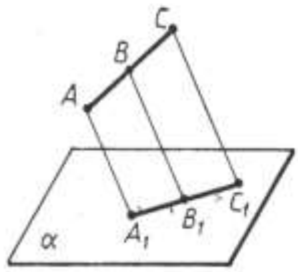
Бақылау сұрақтары:

1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
5. Түзулердің өзара орналасуы
6. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы
7. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі

Кеңістік фигураларын жазықтыққа кескіндеу үшін әдетте параллель проекциялауды пайдаланады. Фигураны кескіндеудің бұл тәсілі мынадай. Сызба жазықтығын қиып өтетін қандай бір h түзуін аламыз да, фигураның кез келген А нүктесі арқылы h-қа параллель түзу жүргіземіз. Бұл түзудің



336-сурет



337-сурет

сызба жазықтығымен қиылысу A_1 нүктесі А нүктесінің кескіні болады (336-сурет). Осылайша фигураның әр нүктесінің кескінін салу арқылы фигураның өзінің кескінін шығарып аламыз. Кеңістік фигурасын жазықтыққа кескіндеудің мұндай тәсілі фигураға алыстан қарағандағы алатын әсерімізге сай.

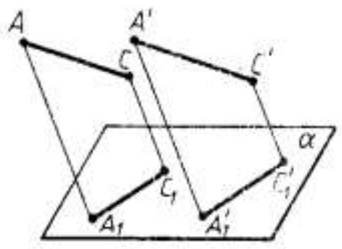
Фигураны жазықтыққа кескіндеудің жоғарыда айтылған сипаттамасынан шығатын кейбір қасиеттерді атап өтейік.

Фигураның түзу сызықты кескінділері сызба жазықтығында кесінді болып кескінделеді (337-сурет).

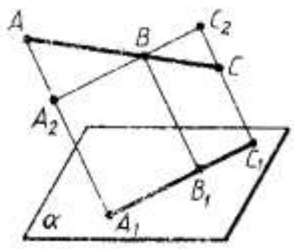
Шынында да, АС кесіндісінің нүктелерін проекциялайтын барлық түзулер сызба жазықтығы α-ны A_1C_1 түзуі бойымен қиятын бір жазықтықта жатады. АС кесіндісінің кез келген *B* нүктесі A_1C_1 кесіндісінің B_1 нүктесіне кескінделеді.

Е с к е р т у . Осы дәлелденген қасиетте де және былайғы уақытта да, әрине, проекцияланатын кесінділер проекциялау бағытына параллель емес деп ұйғарылады.

Фигураның параллель кесінділері сызба жазықтығында параллель кесінділермен кескінделеді (338-сурет).



338-сурет



339-сурет

1) Үшбұрыштың параллель проекциясы берілген. Осы үшбұрыштың медианаларының проекцияларын қалай салуға болады?
2) Үшбұрыштың параллель проекциясы берілген. Үшбұрыштың орта сызығының проекциясы қалай кескінделеді?
3) Параллелограмды параллель проекциялағанда трапеция шығуы мүмкін бе? Жауабын түсіндіріңдер.
4) Параллель проекцияланған параллелограмның проекциясы квадрат бола ала ма?
5) Центрлік-симетриялы фигураның параллель проекциясы да центрлік-симметриялы фигура болып табылатынын дәлелдеңдер.

6) ABCD параллелограмының проекциясы төртбұрыш. Егер: 1) $\backslash AA_1\backslash = 2$м, $\backslash BB_1\backslash = 3$ м, $|CC_1| = 8$м;
2) $|AA_1| = a$, $\backslash BB_1\backslash = b\ |$, $|CC_1| = c$, онда DD_1 ұзындығын табыңдар.

Сабақ: № 59. Түзу мен жазықтық перпендикулярлығы

Жоспары:

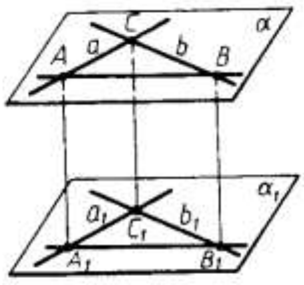
1. **Перпендикуляр түзулер анықтамасы**
2. **Түзу мен жазықтық перпендикулярлығының белгісі**
3. **Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығының қасиеттері**

Бақылау сұрақтары:

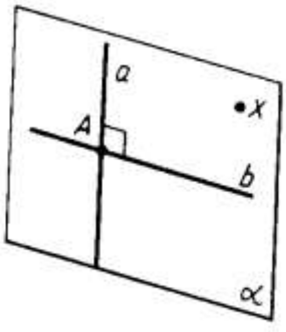
1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
5. Түзулердің өзара орналасуы
6. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы
7. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі
8. Параллель проекциялау дегеніміз не?
9. Проекция кезінде фигуралар қалай көшеді?
10. Қасиеттері қандай?

Жазықтықтағы сияқты, егер екі түзу тік бұрыш жасап қиылысатын болса, онда ол түзулер *перпендикуляр түзулер* деп аталады.

Т е о р е м а 17.1. *Егер қиылысатын. екі түзу перпендикуляр екі түзуге сәйкесінше параллель болса, онда олар өзара перпендикуляр болады.*



350-сурет



351-сурет

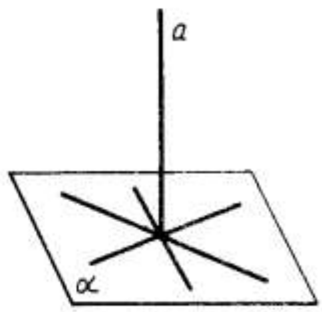
Егер жазықтықты қиятын түзу сол жазықтықта жатқан және түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі арқылы өтетін кез келген түзуге перпендикуляр болса, онда түзу жазықтыққа *перпендикуляр* деп аталады (352-сурет).

Т е о р е м а 17.2. *Егер жазықтықты қиятын түзу осы жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болса, ол түзу жазықтыққа перпендикуляр болады.*

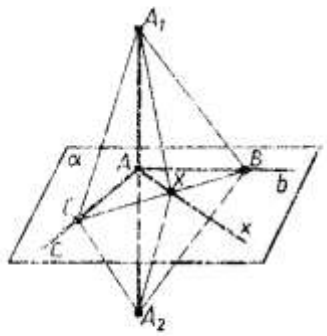
α жазықтығында A нүктесі арқылы кез келген x түзуін жүргізіп, оның a түзуіне перпендикуляр болатынын көрсетеміз. α жазықтығында A нүктесі арқылы өтпейтін және ***b* , *c*** мен ***x*** түзулерін қиып өтетін кез келген түзу жүргіземіз. Қиылысу нүктелері B, C және X болсын.

a түзуінің бойына A нүктесінен бастап оның екі жағына AA_1 және AA_2 тең кесінділерді өлшеп саламыз. $A_1 CA_2$ үшбұрышы тең бүйірлі, өйткені AC кесіндісі теореманың шарты бойынша биіктік болып және салу бойынша медиана болып табылады ($AA_1 = AA_2$). Сол себеп бойынша $A_1 BA_2$ үшбұрышы да тең бүйірлі. Демек, A_1BC және A_2BC үшбұрыштары үшбұрыштар теңдігінің үшінші белгісі бойынша тең.

$A_1 BC$ және $A_2 BC$ үшбұрыштарының теңдігінен $A_1 BX$, A_2BX бұрыштарының теңдігі шығады, демек, үшбұрыштар теңдігінің бірінші белгісі бойынша $A_1 BX$ және $A_2 BX$ үшбұрыштарының теңдігі шығады. Осы үшбұрыштардың $A_1 X$ және



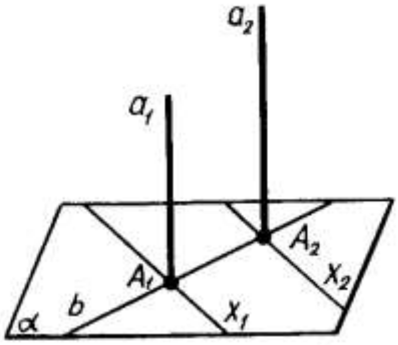
352-сурет



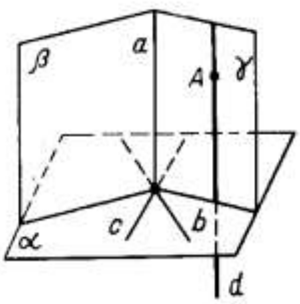
353-сурет

ҚАСИЕТТЕРІ

Т е о р е м а 17.3. *Егер жазықтық параллель екі түзудің біріне перпендикуляр болса, онда ол екінші түзуге де перпендикуляр болады.*



358-сурет



359-сурет

Теорема 17.4. *Бір ғана жазықтыққа перпендикуляр болатын екі түзу параллель болады.*

1. Кеңістікте түзудің кез келген нүктесі арңылы оған перпендикуляр түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
2. Кеңістікте түзудің кез келген нүктесі арқылы оған перпендикуляр әр түрлі екі түзу жүргізуге болатынын дәлелдеңдер.
3. AB, AC және AD түзулері қос-қостан перпендикуляр (371-сурет). *CD* кесіндісін табыңдар, сонда: 1) *AB* = 3 см, *BC* = 7 СМ, *AD* = 1,5 СМ; 2) *BD* = 9 СМ, *BC* = 16 см, AD = 5 СМ; 3) *AB = b, BC = a, AD = d;* 4) *BD = c, BC = a, AD = d.*
5. *ABCD* тік төртбұрышының *A* төбесі арқылы оның жазықтығына перпендикуляр АК түзуі жүргізілген. К нүктесінен тік төртбұрыштың басқа төбелеріне дейінгі қашықтықтар 6 м-ге, 7 м-ге және 9 м-ге тең. АК кесіндісін табыңдар.

Сабақ: № 60. Перпендикуляр және көлбеу. Жазықтық пен түзу арасындағы бұрыш. Үш перпендикуляр туралы теорема

Жоспары:

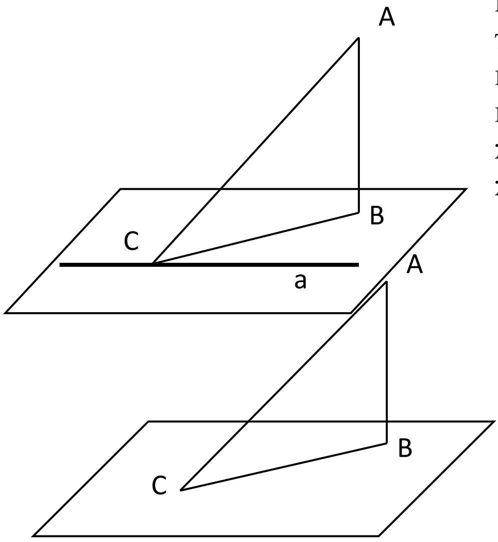
1. **Перпендикуляр мен көлбеу анықтамасы**
2. **Көлбеу проекциясының анықтамасы**
3. **Үш перпендикуляр туралы теорема**

Бақылау сұрақтары:

1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
5. Түзулердің өзара орналасуы
6. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы
7. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі

8. Параллель проекциялау дегеніміз не?
9. Проекция кезінде фигуралар қалай көшеді?
10. Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығы?

Жазықтық пен онда жатпайтын түзу берілсін. Берілген нүктеден берілген жазықтыққа түсірілген ***перпендикуляр*** деп берілген нүктені берілген жазықтық нүктесімен қосатын және жазықтыққа перпендикуляр түзу бойында жататын кесіндіні айтады. Бұл кесіндінің жазықтықта жатқан нүктесін перпендикуляр ***табаны*** деп айтады. Нүктеден жазықтыққа дейінгі ***қашықтық*** осы нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең.



Берілген нүктеден берілген жазықтыққа түсірілген ***көлбеу*** деп жазықтыққа перпендикуляр емес, бір ұшы берілген нүктеде, екінші ұшы жазықтықта жатқан кесіндіні айтады. Көлбеудің жазықтықта жатқан ұшы көлбеудің ***табаны*** деп аталады. Бір нүктеденжүргізілген перпендикуляр мен көлбеудің табандарын қосатын кесінді ***көлбеудің проекциясы*** деп аталады.
АВ – перпендикуляр
АС- көлбеу
ВС – көлбеудің проекциясы
(Үш перпендикуляр туралы теорема) Теорема. Жазықтықта көлбеудің табаны арқылы оның проекциясына перпендикуляр етіп жүргізілген түзу сол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады. Кері теорема да дұрыс.
а түзуі **ВС** көлбеудің проекциясына перпендикуляр. АС көлбеуіне а түзуі перпендикуляр болатынын дәлелдеу керек.
Дәлелдеу үшін АВС үшбұрышын жазықтықпен толықтырамыз. Пайда болған жазықтық берілген жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан, ондағы а түзуіне де перпендикуляр, сондықтан а түзуі АС көлбеуіне де перпендикуляр болады. **Теорема дәлелденді.**

Жазықтық пен түзу арасындағы бұрыш. Жазықтық пен оны қиятын перпендикуляр емес түзу берілсін. Түзу мен жазықтық арасындағы ***бұрыш*** деп осы түзу мен оның жазықтыққа түсірілген проекциясы арсындағы бұрышты айтады. Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, онда арасындағы бұрыш тік болады.

Есептер:
№1. Нүктеден жазықтыққа перпендикуляр мен көлбеу жүргізілген. Көлбеудің ұзындығы 5см, ал оның проекциясының ұзындығы 4 см-ге тең. Перпендикулярдың ұзындығын табу керек.

№2. Нүктеден жазықтыққа 10 см және 17 см-ге тең екі көлбеу жүргізілген. Осы көлбеулердің проекцияларының айырмасы 9 см-ге тең. Көлбеулердің проекцияларын тау керек.
№3. Нүктеден жазықтыққа екі көлбеу жүргізілген. Егер олардың біреуі екіншісінен 26 см артық, ал көлбеулердің проекциялары 12 см және 40 см болса, көлбеулердің ұзындықтарын табыңдар.

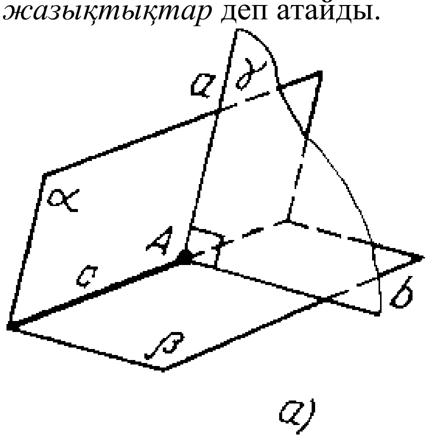
Сабақ: № 61. Екі жақты бұрыш. Жазықтықтар арасындағы бұрыш. Екі жазықтықтың перпендикулярлығы
Жоспары:

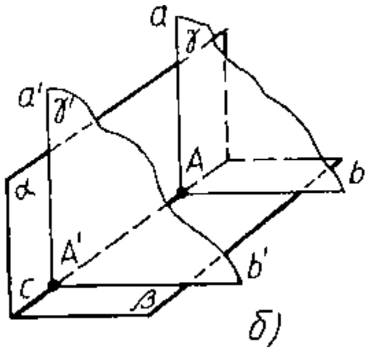
1. **Екі жақты бұрыш ұғымы**
2. **Жазықтықтар арасындағы бұрыш**
3. **Екі жазықтықтың перпендикулярлығының белгісі**
4. **Екі жазықтықтың перпендикулярлығының қасиеттері**

Бақылау сұрақтары:

8. Стереометрия дегеніміз не?
9. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
10. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
11. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
12. Түзулердің өзара орналасуы
13. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы
14. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі
15. Параллель проекциялау дегеніміз не?
16. Проекция кезінде фигуралар қалай көшеді?
17. Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығы?

Егер қиылысатын екі жазықтықтың қиылысу түзуіне перпендикуляр үшінші жазықтық оларды перпендикуляр түзулер бойымен қиятын болса, оларды *перпендикуляр жазықтықтар* деп атайды.





365-сурет

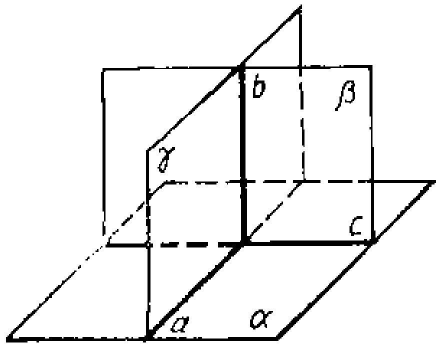
365, α-суреттен c түзуі бойымен қиылысатын α және β перпендикуляр екі жазықтықты көріп отырсыңдар, c түзуіне перпендикуляр болатын γ жазынтығы α мен β жазықтықтарын перпендикуляр α мен b түзулері бойымен қиып өтеді.

Теорема 17.5. Перпендикуляр жазықтықтардың қиылысу сызығына перпендикуляр кез келген жазықтық оларды перпендикуляр түзулер бойымен қияды.

Шынында да, егер c түзуіне перпендикуляр болатын басқа γ' жазықтығын алатын болсақ, ол α жазықтығын c түзуіне перпендикуляр, олай болса, *a* түзуіне параллель *a'* түзуі бойымен қиып өтеді, ал β жазықтығы c түзуіне перпендикуляр, олай боса, b түзуіне параллель b ' түзуі бойымен қияды (365, б-сурет). 17.1-теорема бойынша a және b түзулерінің перпендикулярлығынан *a'* және *b'* түзулерінің перпендикулярлығы шығады. Дәлелдеу керегі осы болатын.

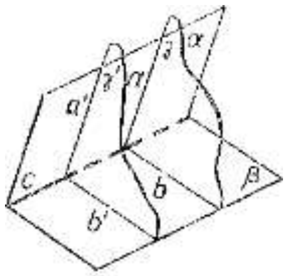
Теорема 17.6. Егер жазықтық басқа бір жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтетін болса, онда бұл жазықтықтар перпендикуляр болады.

Дәлелдеу. Айталық, α — жазықтық, b — оған перпендикуляр түзу, β — b түзуі арқылы өтетін жазықтық және *c* — α және β жазықтықтарының қиылысу түзуі болсын (366- сурет). α және β жазықтықтарының перпендикуляр екендігін дәлелдейік.



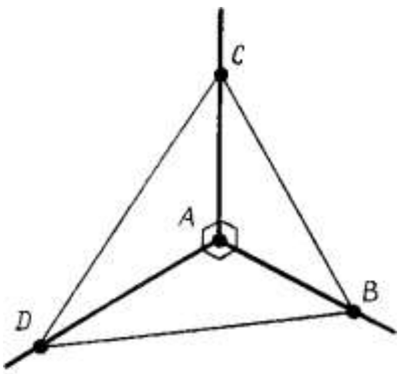
366-сурет

α жазықтығында b түзуінің α жазықтығымен қиылысу нүктесі арқылы c түзуіне перпендикуляр етіп a түзуін жүргіземіз. a және b түзулері арқылы γ жазықтығын жүргіземіз. Ол *c* түзуіне перпендикуляр, өйткені *c* түзуі *a* және *b* түзулеріне перпендикуляр. a және b түзулері перпендикуляр болғандықтан, α және β жазықтықтары перпендикуляр болады. Теорема дәлелденді.



392-сурет

Сабақ: № 62. Екі жақты бұрыш. Жазықтықтар арасындағы бұрыш. Екі жазықтықтың перпендикулярлығы



371-сурет

Жоспары:
1.Екі жақты бұрыш ұғымы
2.Жазықтықтар арасындағы бұрыш
3.Екі жазықтықтың перпендикулярлығының белгісі
4.Екі жазықтықтың перпендикулярлығының қасиеттері

ЖАЗЫҚТЫҚТАР АРАСЫНДАҒЫ БҰРЫШ

Жазықтықтар арасындағы бұрыш ұғымын анықтаймыз. Параллель жазықтықтар арасындағы бұрыш нөлге тең деп есептеледі.

Берілген жазықтықтар қиылысатын болсын. Олардың қиылысу түзуіне перпендикуляр жазықтық жүргіземіз. Ол берілген жазықтықтарды екі түзу бойымен қияды. Осы түзулер арасындағы бұрыш *берілген жазықтықтар арасындағы бұрыш* деп аталады (392-сурет).

Осылайша анықталатын жазықтықтар арасындағы бұрыш қиюшы жазықтықтың қалай алынғанына тәуелді емес.

1AB, AC және AD түзулері қос-қостан перпендикуляр (371-сурет). *CD* кесіндісін табыңдар, сонда: 1) *AB* = 3 см, *BC* = 7 СМ, *AD* = 1,5 СМ; 2) *BD* = 9 СМ, *BC* = 16 cm, AD = 5 СМ; 3) *AB = b, BC = a, AD = d;* 4) *BD = c, BC = a, AD = d.*

2ABCD тік төртбұрышының *A* төбесі арқылы оның жазықтығына перпендикуляр AK түзуі жүргізілген. K нүктесінен тік төртбұрыштың басқа төбелеріне дейінгі қашықтықтар 6 м-ге, 7 м-ге және 9 м-ге тең. AK кесіндісін табыңдар.

3.A және B нүктелері арқылы α жазықтығына перпендикуляр және оны сәйкесінше C және *D* нүктелерінде қиятын түзулер жүргізілген. *AC* = 3 м, *BD* = 2 м, *CD* = 2,4 м болса, және

АВ кесіндісі α жазықтығын қимаса, А мен В нүктелерінің арасындағы ңашықтықты табыңдар.

4.Берілген нүктеден жазықтыққа ұзындығы 2 м-ге тең әр түрлі екі көлбеу жүргізілген. Көлбеулердің арасындағы бұрыш 60°, ал олардың проекциялары өзара перпендикуляр деп алып, нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.
Екі перпендикуляр жазықтықта жатқан А және В нүктелерінен жазықтықтардың қиылысу түзуіне АС және BD перпендикуляры түсірілген. АВ кесіндісінің ұзындығын табыңдар. Сонда: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, BD — b, $CD = c$; **6)** AD —a, $BC=b$, $CD = c$.

Сабақ: № 63. Есептер шығару.Бақылау жұмысы

Бақылау сұрақтары:

1. Стереометрия дегеніміз не?
2. Стереометрияның негізгі ұғымдары?
3. Стереометрияның негізгі аксиомалары?
4. Аксиомаларға мысалдар келтіріңдер?
5. Түзулердің өзара орналасуы
6. Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы
7. Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі
8. Параллель проекциялау дегеніміз не?
9. Проекция кезінде фигуралар қалай көшеді?
10. Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығы?
11. Перпендикуляр дегеніміз не?
12. Көлбеу дегеніміз не?
13. Көлбеудің проекциясы дегеніміз не?
14. Перпендикуляр жазықтықтар дегеніміз не?
15. Екі жақты бұрыш дегеніміз не?

1. Тең қабырғалы үшбұрыштың қабырғалары 3 м-ге тең. Үшбұрыштың әрбір төбесінен 2 м қашықтықтағы нүктеден үшбұрыш жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

21. Тік бұрышты АВС үшбұрышының С тік бұрышының төбесі арқылы гипотенузадан 1 м қашықтықта оған параллель жазықтық жүргізілген. Катеттердің осы жазықтыққа проекциялары 3 м және 5 м-ге тең. Гипотенузаны табыңдар.

37. Ұзындығы 10 м-ге тең кесінді жазықтықты қияды, оның ұштары жазықтықтан 2 м және 3 м қашықтықта жатыр. Берілген кесінді мен жазықтық арасындағы бұрышты табыңдар.

Бақылау жұмысы:

I – нұсқа

1. *AB* кесіндісі жазықтықты *D нүктесінде қияды. Кесіндінің ұштарынан жазықтыққа* AA_1 *және* BB_1 перпендикулярлары түсірілген. $AD=5см$, $AA_1=3см$, $DB_1=8см$. BB_1 *және* AB *кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.*
2. *A* нүктесінен жазықтыққа көлбеу мен перпендикуляр түсірілген. Перпендикулярдың ұзындығы 3см, көлбеу мен перпендикуляр арасындағы бұрыш 60^0 – қа тең. Көлбеу проекциясының ұзындығын табу керек.
3. Екі жақты бұрыштың мәні 30^0 – қа тең. Оның бір жағында ұзындығы 5 см – ге тең қырына перпендикуляр кесінді жүргізілген. Бұл кесіндінің ұштарынан екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.

II – нұсқа

1. *AB* кесіндісі жазықтықты *D нүктесінде қияды. Кесіндінің ұштарынан жазықтыққа* AA_1 *және* BB_1 перпендикулярлары түсірілген. $AB=9см$, $AA_1=2см$, $AD=3см$. BB_1 *және* DB_1 *кесінділерінің ұзындықтарын табыңдар.*

2. *A* нүктесінен жазықтыққа көлбеу мен перпендикуляр түсірілген. Көлбеудің ұзындығы 5см, көлбеу мен перпендикуляр арасындағы бұрыш 45^0 – қа тең. Көлбеу проекциясының ұзындығын табу керек.
3. Екі жақты бұрыштың мәні 60^0 – қа тең. Оның бір жағында ұзындығы 6 см – ге тең қырына перпендикуляр кесінді жүргізілген. Бұл кесіндінің ұштарынан екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.

Бөлім VII Векторлар және координаттар

Сабақ: № 64. Кеңістіктегі векторлар. Векторларға амалдар қолдану

Жоспары:

1. **Вектор ұғымы**
2. **Екі вектордың арасындағы бұрыш**
3. **Вектор координаталары, вектордың ұзындығы**
4. **Векторларға қолданылатын амалдар**
5. **Векторлардың скаляр көбейтіндісі**

Бақылау сұрақтары:

1. Жазықтықтағы вектор дегеніміз не?
2. Вектордың ұзындығы дегеніміз не?
3. Вектордың координаталарын қалай анықтаймыз?
4. Скаляр көбейтіндісі дегеніміз не?
5. Қалай анықталады?

Кеңістікте векторлар жазықтықтағыдай анықталады, тек үш координатасы бойынша беріледі: $\bar{a}(x, y, z)$. Вектор ұзындығын табу үшін оның координаттарын квадраттап қосамыз да квадрат түбірге аламыз.

$\bar{a}(x, y, z)$. $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (1)

Екі вектордың арасындағы бұрышты табу үшін скаляр көбейтінділерін модульдерінің көбейтіндісіне бөлу керек.

$\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$.

$(\bar{a} * \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$ $\qquad |\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

$\left(\bar{a} * \bar{b}\right) = |\bar{a}| * |\bar{b}| \cos\varphi$ $\qquad |\bar{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{a} * \bar{b}\right)}{|\bar{a}| * |\bar{b}|}. \qquad \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (2)$$

Берілген векторды құраушы 3 векторға жіктеуге болады. Бірлік векторлар арқылы жіктеледі. Ұзындығы 1-ге тең вектор <u>бірлік вектор</u> деп аталады. x, y, z осьтеріндегі векторды $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ бірлік векторлары арқылы өрнектеп, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ <u>- орттар </u>деп аталады.

Сонда $\forall$ векторды орттар бойынша жіктеуге болады. Сонымен $\bar{a}(x, y, z)$ векторын былайша жіктейді. $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ (3).

1-М, $R \neq (3,4,5)$ векторы берілген. Оның ұзындығын табу керек.

$|\bar{R}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. $\qquad \bar{R} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$.

2-М, $\bar{a}(1,2,2), \bar{b}(0,3,4)$ векторлар арасындағы үшбұрышты табу керек.

$\bar{a} = i + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\quad \bar{b} = 3\bar{j} + 4\bar{k}$.

$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$. $\qquad |\bar{b}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

$\left(\bar{a} * \bar{b}\right) = 1*0 + 2*3 + 2*4 = 6 + 8 = 14$.

$\cos\varphi = \frac{14}{3*5} = \frac{14}{15}$. $\quad \varphi = \arccos\frac{14}{15}$.

1. a (1; -5; 2) және b (3; 1; 2) векторлары берілген. Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек: 2<u>*a*</u> + *b* және 3<u>*a - 2*</u>*b*

2. A(0; 1; -1), 5(1; -1; 2), C(3; 1; 0) нүктелері берілген. ABC үшбұрышындағы C бұрышының косинусын табу керек.

3. Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек: 1) a (1; 2; 4), b (-8; 2; 1); 2) p(-2; -3; 1) және q(2; 3; 1).

4. n-нің қандай мәндерінде келесі векторлар перпендикуляр болады: 1) *a* (2; -1; 3), b (1; 3; *n);* 2) *a* (*n*; -2; 1), b *(n;* -4; 1)?

5. Векторлар арасындағы бұрышты тап: a(-2; 2; 1) және b (-1; 0; 1).

6. A(0; 1; -1), Б(1; -1; 2), C(3; 1; 0), *D(2;* -3; 1) нүктелері берілген. *AB* және *CD* *векторларының арасындағы бұрышты тап.*

Сабақ: № 65. Жазықтық пен кеңістіктегі тік бұрышты координаталар

Жоспары:

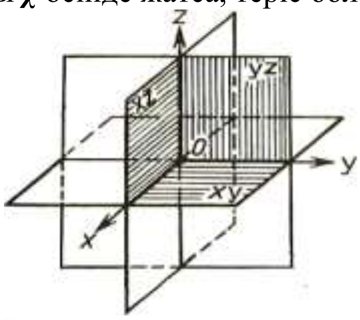
1. **Кеңістіктегі тік бұрышты координаттар жүйесі**
2. **Нүктенің кеңістіктегі орны**
3. **Екі нүктенің ара қашықтығын есептеу формуласы**

Бақылау сұрақтары:

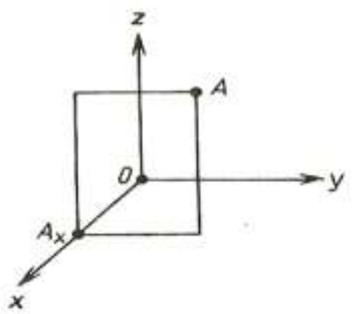
1. Жазықтықтағы вектор дегеніміз не?
2. Вектордың ұзындығы дегеніміз не?
3. Вектордың координаталарын қалай анықтаймыз?
4. Скаляр көбейтіндісі дегеніміз не?
5. Қалай анықталады?
6. Кеңістіктегі вектор қалай анықталады?
7. Векторларға қандай амалдар қолданылады?
8. Екі вектордың арасындағы бұрышты қалай анықтайды?

O нүктесінде қиылысатын өзара перпендикуляр ***x, y, z*** үш түзу алайық (378-сурет). Осы түзулердің әрбір пары арқылы жазықтық жүргіземіз. ***x*** және ***y*** түзулері арқылы өтетін жазықтық ***xy*** жазықтығы деп аталады. Басқа екі жазықтық сәйкес ***xz*** және ***yz*** жазықтықтары деп аталады. ***x, y, z*** түзулері ***координаттық осьтер*** (немесе координаттар осьтері) деп, олардың қиылысу ***O*** нүктесі ***координаттар басы*** деп, ал ***xy, yz*** және ***xz*** жазықтықтары ***координаттық жазықтықтар*** деп аталады. ***O*** нүктесі координаттар осьтерінің әрқайсысын екі жарты түзуге — жарты оське бөледі. Олардың бірін — оң деп, ал екіншісін теріс деп атауға келісейік.

Енді кез келген ***A*** нүктесін алайық та, ол арқылы ***yz*** жазықтығына параллель жазықтық жүргізейік (379-сурет). Ол χ осін қандай да бір A_x нүктесінде қиып өтеді. ***A*** нүктесінің ***χ координаты*** деп абсолют шамасы жағынан OA_x кесіндісінің ұзындығына тең санды атайтын боламыз, ол сан: A_x нүктесі оң жарты χ осінде жатса — оң да, ал егер ол нүкте теріс жарты ***χ*** осінде жатса, теріс болады. Егер A_x нүктесі ***O*** нүктесімен



378-сурет



379-сурет

беттесетін болса, онда x = 0 деп есептейміз. A нүктесінің y және z координаттары да осылайша анықталады. Нүктенің координаттарын нүктенің әріптік белгілеуінің жанына жақшаға алып жазамыз: ***A(x;y; z)***. Кейде нүктені оның тек координаттарымен ғана белгілейміз: (x; y, ***z***).

A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ және A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің ара қашықтығын осы нүктелердің координаттары арқылы өрнектейміз.

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{z}_1)^2}$$

Екі нүктенің ортасын С нүктесі арқылы белгілейік. Осы нүктенің координаттарын былайша табуға болады:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \boldsymbol{z}_C = \frac{\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2}{2}$$

1. Кеңістіктің χ пен у координаттары нөлге тең нүктелері қайда жатады?
2. *A(*1; 2; 3), *B(*0; 1; 2), С(0; 0; 3), Z(l; 2; 0) нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсысы: 1) *xy* жазықтығында; 2) *z* осінде; 3*) yz* жазықтығында жатады?
3. А(1; 2; 3) нүктесі берілген. Осы нүктеден координаттық осьтерге және координаттық жазықтықтарға түсірілген перпендикулярлардың табандарын табыңдар.
4. (1; 2; —3) нүктесінен : 1) координаттың жазықтықтарға; 2) координаттар осьтеріне; 3) координаттар басына дейінгі қашықтықты табыңдар.
5. Алынған А(0;1;-1); В(~ 1;0; 1), С(0; -1; 0) нүктелерінен бірдей қашықтықта жататын *xy* жазықтығының *D(x; y;* 0) нүктесін табыңдар.

Сабақ: № 66. Түзу теңдеулері

Жоспары:

1. **Түзудің теңдеулері**
2. **Екі түзудің арасындағы бұрыш**
3. **Параллельдік және перпендикулярлық шарттары**

Бақылау сұрақтары:

1) Вектор дегеніміз не?
2) Кеңістікте векторлар неше координатамен анықталады?
3) Векторларға қандай амалдар қолданылады?
4) Векторлардың скаляр көбейтіндісі дегеніміз не?
5) Нольдік вектор дегеніміз қандай вектор?
6) Векторды құраушы векторларға жіктеу дегеніміз не?
7) Орттар дегеніміз не?
8) Екі вектордың арасындағы бұрышты қалай табуға болады?

1. Кеңістікте түзу және онда жатқан нүкте берілсін. Онда түзудің теңдеуі мына формуламен есептеледі:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$-нүкте, d -түзуі.

$$d: \quad \boxed{\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{e}} \quad (1),$$

m, n, e -бағыттаушы вектордың координаттары $\bar{t}(m, n, e)$ (түзудің жабайы теңдеуі).

2. Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d: \quad \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad (2)$$

2 түзу берілсе, ол түзулердің арсындағы бұрышты табуға болады:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{e_1}; \qquad \frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{n_2} = \frac{z - z_1}{e_2}.$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + e_1 e_2}{\pm\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + e_1^2} * \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + e_2^2}}} \quad (3)$$

Параллельдік және перпендикулярлық шарттары:

Егер 2 түзу өзара перпендикуляр болса $\left(\varphi = \frac{\Pi}{2}\right)$, онда $\cos\frac{\Pi}{2} = 0$ болады. Яғни (3) теңдік мына түрде болады.

$$\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + e_1e_2}{\pm\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + e_1^2} * \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + e_2^2}} = 0 \Rightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + e_1e_2 = 0$$ - ($\perp$ -лық шарты).

Егер 2 түзу параллель болса, онда $(\varphi = 0)$ болады. Яғни бағыттаушы векторларының шамалары бірдей, ал таңбалары қарама-қарсы болуы мүмкін.

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{e_1}{e_2}}$$ - (||-дік шарты)

1-М, $d : \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Түзуі қандай нүктеден өтеді және бағыттаушы векторының координаттары қандай?

$M_1(-2,0,0)$ - нүкте $\bar{t}(-1,1,1)$ - бағыттаушы вектор.

2-М, $M(1,-2,3)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жаз, бағыттаушы векторы: $\bar{t}(2,3,-4)$

$$(1) \to \frac{x-1}{2} = \frac{y-(-2)}{3} = \frac{z-3}{-4}. \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

3-М, $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ және $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{\frac{3}{2}} = \frac{z}{1}$ теңдеуімен берілген түзулер арасындағы бұрышты табу керек.

$$\cos\varphi = \frac{-1*2+1*\frac{3}{2}+1*1}{\pm\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} * \sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2+1^2}} = \frac{-2+\frac{3}{2}+1}{\pm\sqrt{3}*\sqrt{4+\frac{9}{4}+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\pm\sqrt{3}*\sqrt{\frac{29}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\pm\sqrt{3}*\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{87}}$$

.

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\pm\sqrt{87}}.$$

1. Кесіндінің бір ұшы A(2; 3; —1) және оның ортасы C(1; 1; 1) берілген. Кесіндінің екінші ұшы *B(x; y; z*) нүктесін табыңдар.
2. (1; 2; 3), (0; —1; 2), (1; 0; —3) нүктелері берілген. Берілген нүктелер бір түзудің бойында жата ма?
3. 1) A(2; 1; 0), B(1; 0; 1), *C(*3 ·; —2; 1), *D(*2; —3; 0);
   2) A(-2; 3; 5), B(1; 2; 4), C(4; -3; 6), D(7; -2; 5);
   3) A(0; 1; 2), B(— 1; 0; 1), C(3; -2; 2), *D(2;* -3; 1);
   4) A(1; 1; 0), *B(*0; 0; 0), *C(* — 2; 2; 1), *D* (1; 1; 1) нүктелері арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар. Қандай да бір екі түзудің арсындағы бұрышты табыңдар.

Сабақ: № 67. Бақылау жұмысы

Бақылау сұрақтары:

1. Кеңістіктегі вектор дегеніміз не?
2. Вектордың ұзындығы дегеніміз не?
3. Вектордың координаталарын қалай анықтаймыз?
4. Скаляр көбейтіндісі дегеніміз не?
5. Векторды жіктеу дегеніміз не?
6. Нольдік вектор дегеніміз қандай вектор?

7. Векторды құраушы векторларға жіктеу дегеніміз не?
8. Орттар дегеніміз не?
9. Екі вектордың арасындағы бұрышты қалай табуға болады?
10. Түзудің теңдеулері?

Есептер:

1) ABCD параллелограмының төбесінің координаталарын және диагональдарының қиылысу нүктсінің координаталарын табындар: 1) A(0; 0; 0), B(1; 2; 3), C(—1; 1; -2); 2) A(-1; 2; 1), B(0; 4; 4), C(-2; 3; -1).

2) A(1; 2; 1), B(1; 0; -1), C(— 1; 2; 2), D (3; 2; 1) нүктелері арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар. Қандай да бір екі түзудің арсындағы бұрышты табыңдар.

Бақылау жұмысы

1- нұсқа

1. a (1; -3; 1) және b (2; 1; 1) векторлары берілген. Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек: $3\underline{a} + 2b$ және $\underline{a\ -\ 3}b$
2. *A(*2; 0; 3), *B(*0; 1; 2), C(0; 0; 1), Z(3; 1; 0) нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсысы: 1) *xy* жазықтығында; 2) *z* осінде; 3*) yz* жазықтығында жатады?
3. A(-1; 3; 2), B(1; 2; 1), C(2; -3;1), D(2; -2; 3) нүктелері арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар. Қандай да бір екі түзудің арсындағы бұрышты табыңдар.
4. Кесіндінің бір ұшы A(3; 2; —2) және оның ортасы C(2; 1; 3) берілген. Кесіндінің екінші ұшы *B(x; y; z*) нүктесін табыңдар.

2- нұсқа

1. a (2; -1; 3) және b (1; -2; 1) векторлары берілген. Келесі векторлардың скаляр көбейтіндісін табу керек: $\underline{a} + 2b$ және $2\underline{a\ -\ }b$
2. *A(*1;0; -1), *B(*2; 3; 0), C(-1; 0; 0), Z(-2; 2; 0) нүктелері берілген. Осы нүктелердің қайсысы: 1) *xy* жазықтығында; 2) *z* осінде; 3*) yz* жазықтығында жатады?
3. *A(1; 2; 0), B(0; 0; 1), C(2; —1; 2), D(1; —3; 0)* нүктелері арқылы өтетін түзулердің теңдеулерін жазыңдар. Қандай да бір екі түзудің арсындағы бұрышты табыңдар.
4. Кесіндінің бір ұшы A(1; -2; 1) және оның ортасы C(1; 0; 2) берілген. Кесіндінің екінші ұшы *B(x; y; z*) нүктесін табыңдар.

Бөлім VIII Интеграл және оның қосымшасы

Сабақ № 68. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері.

Жоспары:

1. **Алғашқы функция ұғымы**
2. **Анықталмаған интеграл ұғымы**
3. **Анықталмаған интегралдың қасиеттері**
4. **Анықталмаған интегралдың кестесі**

Бақылау сұрақтары:

1. Функцияның өсімшесі дегеніміз не?
2. Функцияның туындысы дегеніміз не?
3. Туындының негізгі қасиеттері қандай?
4. Күрделі функцияның туындысын қалай есептейді?
5. Функцияның туындысы нені береді?
6. Функцияның дифференциалы дегеніміз не?
7. Дифференциалдың қолданысы?

Бір мысал қарастырайық:

$F(x) = x^2$ $F'(x) = 2x.$ $f(x) = 2x.$ деп белгілесек, онда $F'(x) = f(x)$.

Яғни, бізге функцияның туындысы берілген, ал өзін табу керек.

А: Егер берілген аралықта $\forall x$ үшін $F'(x)=f(x)$ болса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясы үшін **алғашқы функция** деп аталады.

М, 1. $F(x)=x^7$, $(-\infty,+\infty)$.

$(x^7)'=7x^6$.

Демек, x^7 функциясы $7x^6$ үшін алғашқы функция болып табылады.

2. $F(x)=\cos x$, $f(x)=-\sin x$

$\cos x$ функциясы $-\sin x$ функциясының алғашқы функциясы.

3. $F(x)=x^2+C$, С – тұрақты сан. $f(x)=2x$ функциясының алғашқы функциясы біреу ғана емес.

Бұдан $[F(x)+C]'=f(x)$, $C=const.$

А: Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x)+C$, $f(x)$ функцияның анықталмаған интегралы деп аталады да, былай белгіленеді: $\int f(x)dx=F(x)+C.$

Мұндағы $\int$ - интеграл белгісі, $f(x)$ - интеграл астындағы функция, dx -интегралдау амалы (қай айнымалы бойынша жүргізілгенін көрсетеді), $f(x)dx$ -интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Оқылуы: $f(x)$ функциясын х бойынша интегралдау.

Интегралдың белгілеуінде dx жазуы ерекше роль атқарады.

Мысалы, $\int txdx=\frac{tx^2}{2}+C,$

$\int txdt=\frac{xt^2}{2}+C,$

Ескеретін жағдай:

$\int\frac{1}{f(x)}dx$ жазуының орнына $\int\frac{dx}{f(x)}$ деп жазуға болады.

$\int 1dx=\int dx$ деп жазамыз.

Функцияны интегралдау оның интегралдық есептеуі деп аталады. Интегралдау амалы дифференциалдау амаланы кері амал.

Негізгі қасиеттеріне тоқталайық.

1^0 $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ интеграл туындысы интеграл астындағы функцияға тең.

2^0 $d\int f(x)dx=f(x)dx$ - анықталмаған интеграл дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең.

3^0 $\int d(F(x))=F(x)+C$ - дифференциалдың анықталмаған интегралы дифференциалданған функция мен кез келген тұрақтының қосындысына тең.

4^0 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ -тұрақты көбейткішті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады.

5^0 $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx+C$ - бірнеше функцияның қосындысының интегралы олардың интегралының қосындысына тең.

Интегралдау формулалары:

1. $\int 0dx=C$	8. $\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C$	15. $\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\Pi}{4}\right)\right|+C$

2. $\int du = u + C$	9. $\int \sin u du = -\cos u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| +$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$	17. $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\arccos \frac{u}{a} + C$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	12. $\int tgudu = \ln\|\cos u\| + C$	19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
6. $\int e^u du = e^u + C$	13. $\int ctgudu = \ln\|\sin u\| + C$	20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
7. $\int \cos u du = \sin u + C$	14. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|tg \frac{u}{2}\right\| + C$	21. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$

Функциялардың алғашқы функциясын табыңдар (1—3):

1. 1) $f(x) = 3x$; 2) $f(x) = 4x^2 + x - 2$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

2. 1) $f(x) = 2\sin x$; 2) $f(x) = 5\cos x$;

3) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$; 4) $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$.

3.

$y = f(x)$ функциясы үшін алғашқы функцияның жалпы түрін анықтаңдар:

1) $f(x) = (x-1)^3$; 2) $f(x) = (1-2x)^2$;

3) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 11x^{10}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 12x^8$.

Сабақ № 69. Алмастыру тәсілімен интегралдау.

Жоспары:

1. **Алмастыру әдісін қолдану**
2. **Алмастыру әдісімен шығарылатын есептер**

Бақылау сұрақтары:

1. Функцияның алғашқы функциясы дегеніміз не?
2. Берілген функцияның неше алғашқы функциясы бар?
3. Функцияның анықталмаған интегралы дегеніміз не?
4. Анықталмаған интегралыдң негізгі қасиеттері?
5. Тұрақты санның анықталмаған интегралы неге тең?

Егер берілген интеграл қарапайым түрлендіру арқылы табылмаса, онда басқадай әдістер қолданады.

М, $\int (1+x)^5 dx$, $1 + x = z$ деп белгіленеді, мұндағы z -жаңа айнымалы.

$dx = dz$. $\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C$

Енді х арқылы өрнектейік, сонда:

$$\int (1+x)^5 dx = \frac{1}{6}(1+x)^6 + C.$$

Тексеру үшін дифференциалдайық: $\left[\frac{1}{6}(1+x)^6+C\right]'=\frac{1}{6}*6(1+x)^{6-1}=(1+x)^5$

2-М, $\int\sqrt{2x+3}dx$. $2x+3=z$. $2dx=dz$ $dx=\frac{dz}{2}$

$$\int\sqrt{2x+3}dx=\int\sqrt{z}*\frac{dz}{2}=\frac{1}{2}*\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{2}*\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}+C}\frac{z\sqrt{z}}{3}+C$$

$$\int\sqrt{2x+3}dx=\frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{3}+C.$$

3-М, $\int\frac{x^2dx}{1+x^3}$ $1+x^3=z$. $3x^2dx=dz$ $x^2dx=\frac{dz}{3}$.

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^3}=\int\frac{dz}{z*3}=\frac{1}{3}\ln|z|+C=\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|+C.$$

4-М, $\int\sin^2 x\cos xdx\Rightarrow$ $\sin x=z$

$\cos xdx=dz$

$$\int\sin^2 x\cos xdx=\int z^2dz=\frac{z^3}{3}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

Есептер:

1. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$
2. $\int\cos x(1-\sin x)^2 dx$
3. $\int\frac{\frac{1}{x}dx}{\sqrt{3\lg x+1}}$
4. $\int\frac{xdx}{2x^2+1}$

$$\int\frac{x^3dx}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Сабақ № 69. Алмастыру тәсілімен интегралдау.

Жоспары:

1. **Дәрежесі бар күрделі функциялардың интегралын есептеуде алмастыру әдісін қолдану**
2. **Алмастыру әдісіне есептер**

Бақылау сұрақтары:

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Берілген функцияның алғашқы функциясы нешеу болады?
3. Анықталмаған интегралдың анықтамасын бер?
4. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттерін ата?
5. Анықталмаған интегралды есептеудің формулаларын бер?

1-М, $\int\frac{(1+\ln x)^7}{x}dx$,

$1+\ln x = z$ деп белгіленеді, мұндағы z -жаңа айнымалы. $\frac{dx}{x} = dz$.

$$\int \frac{(1+x)^7}{x}dx = \int z^7 dz = \frac{z^8}{8} + C$$

Енді x арқылы өрнектейік, сонда:

$$\int \frac{(1+x)^7}{x}dx = \frac{1}{8}(1+\ln x)^8 + C.$$

Тексеру үшін дифференциалдайық: $\left[\frac{1}{8}(1+\ln x)^8 + C\right]' = \frac{1}{8}\cdot 8(1+\ln x)^{8-1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{(1+x)^7}{x}$

2-М,

$$\int (e^x - 2)\sqrt{e^x - 2x}dx.$$

$$e^x - 2x = z.$$

$$(e^x - 2x)' dx = dz$$

$$(e^x - 2)dx = dz$$

$$\int \sqrt{z}dz = \int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\cdot z\sqrt{z}}{3} + C$$

$$\int (e^x - 2)\sqrt{e^x - 2x}dx = \frac{2\cdot(e^x - 2x)\sqrt{e^x - 2x}}{3} + C.$$

Енді бірнеше есеп шығарып көрейік.

1. $\int \frac{(2+\ln x)^2 dx}{x}$

2. $\int (e^x - 1)^4 \cdot e^x dx$

3. $\int \frac{(tgx + 1)^2 dx}{\cos^2 x}$

4. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}$

5. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Сабақ № 70. Анықталған интеграл және оның геометриялық мағынасы

Жоспары:

1. **Анықталған интеграл ұғымы**
2. **Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы**

Бақылау сұрақтары:

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Анықталмаған интеграл дегеніміз не?
3. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері қандай?
4. Дифференциалдау амалы нені көрсетеді?
5. Интегралдау дегеніміз не?
6. Тұрақтының интегралы неге тең?
7. Қосындының интегралы неге тең?

8. Интегралдан алынған туынды нені береді?

Бізге анықталмаған интеграл берілсін: $\int 2xdx = x^2 + c$.

Осындағы аргумент $x = 2$ -ден $x = 4$ -ке дейін өзгерсін. Онда алғашқы функцияның өсімшесі мынаған тең болады.

$|\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)|$ $\quad 4^2 + c - (2^2 + c) = 16 - 4 = 12$.

Осы табылған мәніміз анықталған интеграл деп аталынады. Алғашқы функцияның өсімшесі анықталған интегралды береді және былай деп белгіленеді: $\int\limits_2^4 2xdx$, мұндағы 2 және 4 шектер деп аталады.

А: Аргументтің х=а-дан х=в-ға дейін өзгергендегі алғашқы функцияның $(F(x)+c)$ өсімшесі $F(b) - F(a)$ анықталған интеграл деп аталынады және былай белгіленеді: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Оқылуы: «а-дан в-ға дейінгі алынған интеграл эф от икс дэ икс»

А – төменгі шегі, в- жоғарғы шегі.

Алынған интегралды табу үшін мына формуланы қолданады.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1-М, $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+1)dx$ есепте

$$\int\limits_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \int\limits_{-1}^{1}x^2dx + \int\limits_{-1}^{1}dx = \frac{x^{2+1}*1}{2+1}\Big|_{-1}^{1} + x\Big|_{-1}^{1} = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + 1 + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.$$

2-М, $\int_{\frac{П}{3}}^{\frac{П}{2}} 4\cos xdx = \quad 4\int_{\frac{П}{3}}^{\frac{П}{2}} \cos xdx = 4\sin x$

$$\Big|_{\frac{П}{3}}^{\frac{П}{2}} = 4(\sin\frac{П}{2} + \sin\frac{П}{3}) = 4(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 4(1 - 0{,}865) = 4 * 0{,}135 = 0{,}54.$$

4/

3-М, $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_1^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg1 = \frac{{}^{4/}П}{3} - \frac{{}^{3/}П}{4} = \frac{П}{12}$.

$y = f(x)$ теңдеуімен анықталған қисық берілсін және $[a,b]$ аралығында анықталсын.

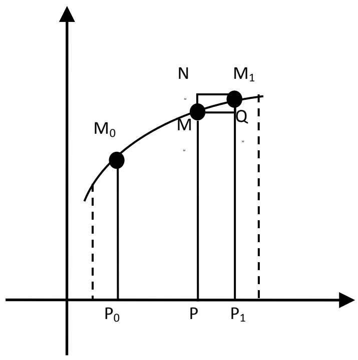
$M_0 \in f(x)$ нүктесін алайық.

$OP_0 = a$ $\quad M_0$ **нүктесінің абциссасы және М нүктесінің абциссасы** $OP = x$ **өзгеретін бо**лсын.

Онда M_0MPP_0 фигурасының ауданы болып табылады және ол х шамасына тәуелді өзгеріп отырады. Оны S деп белгілейді.

Х аргуменіне $PP_1 = \Delta x$ өсімше берейік, онда S ауданы ΔS өсімшесін алады және MM_1P_1P ауданына тең болады.

$MQ \parallel OX, M_1N \parallel OX$ жүргізейік. Онда: $\quad S_{MQP_1P} \langle \Delta S \langle S_{NM_1P_1P}$.



Тіктөртбұрышты үшбұрыш аудандарын формула бойынша жазайық:

$MP \cdot PP_1 \langle \Delta S \langle M_1P_1 \cdot PP_1$ $\quad (1) \quad$ $PP_1 = \Delta x$. $\quad PM = f(x)$.

$P_1M_1 = f(x+\Delta x)$.

Сондықтан (1) теңсіздік былай жазылады:

$f(x)\Delta x \langle \Delta S \langle f(x+\Delta x)\Delta x. \quad /:\Delta x$

$$f(x) < \frac{\Delta S}{\Delta x} < f(x+\Delta x) \qquad (2)$$

$\Delta x \to 0$, онда $f(x+\Delta x) \to f(x)$. Ал $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ екеуінің арасында болғандықтан

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. Ал бұл туынды болып табылады.

S функцияның туындысы, яғни: $\frac{dS}{dx} = f(x)$. $\quad dS = f(x)dx \quad (3)$

2 жақтан интеграл алсақ:

$\int dS = \int f(x)dx$, қасиеті бойынша

$S + C_1 = \int f(x)dx$. $\quad \int f(x)dx = F(x) + C_2$ болсын.

$S + C_1 = F(x) + C_2$. $\qquad S = F(x) + C_2 - C_1 = F(x) + C$

Егер де x=0 десек, онда $S(M_0MPP_0) = S = 0$ болады.

$F(a) + C = 0 \Rightarrow -F(a) = C$. $\qquad S = F(x) - F(a)$ болады.

Анықтама бойынша $F(x) - F(a) = \int\limits_a^x f(x)dx$.

Демек, $S = \int\limits_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$.

Бірақ бұл формула (M_0MPP_0) фигурасының айнымалы ауданын көрсетеді.

$x = b$ десек, онда $S_{M_0M_1P_1P_0} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

A: $y = f(x)$ қисығы, O_x осі және $x = a, x = b$ түзулерімен шектелген фигураның ауданы мына анықталған интеграл арқылы анықталады:

$S = \int_a^b f(x)dx$. геом. мағынасы.

1-М, $y = x^2$ қисығы, O_x осі және $x = 0, x = 3$ түзулерімен шектелгн фигураның ауданын табу керек.

Шешуі: Ізделінді аудан мына формула бойынша есептеледі:

$$S = \int\limits_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{27}{3} = 9 \quad \text{(кв. бірлігі)}$$

Жауабы: 9 кв. бірлігі.

Берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар (18—21):

18. 1) $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; 2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;
3) $y = 2x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; 4) $y = 2x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

19. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;
2) $y = x^2 - 2x + 8$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$;
3) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;
4) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

20. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

21. 1) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; 2) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$;
3) $y = 3x - x^2$, $y = 0$; 4) $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

22. Абсцисса осі және

1) $y = \cos x$ функциясының графигімен және $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ түзулерімен шектелген;

2) $y = \sin x$ функциясының графигімен және $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ түзулерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар.

Сабақ № 71. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері мен оны есептеу.

Жоспары:

1. **Анықталған интегралыдң негізгі қасиеттері**
2. **Қасиеттеріне байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Анықталмаған интеграл дегеніміз не?
3. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері қандай?
4. Қосындының интегралы неге тең?
5. Интегралдан алынған туынды нені береді?
6. Анықталған интеграл дегеніміз не?

Анықталған интегралдың негізгі қасиеттерін қарастырайық.

1^0 $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k = const.$$

1-М,

$$\int_1^3 3x^5dx = 3\int_1^3 x^5dx = 3*\frac{x^6}{6}\Big|_1^3 = 3(\frac{3^6}{6}-\frac{1^6}{6}) = 3(\frac{81*9}{6}-\frac{1}{6}) = 3(\frac{^{3/}243}{2}-\frac{1}{6}) = 3(\frac{729-1}{6}) = \frac{728}{2} = 364.$$

2^0. $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

2-М,

$$\int_1^2 (x^2 - x^3)dx = \int_1^2 x^2dx - \int_1^2 x^3dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} - (\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} -$$

$$-\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{^{4/}7}{3}-\frac{^{3/}15}{4}=\frac{28-45}{12}=-\frac{17}{12}=-1\frac{5}{12}.$$

3^0. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

3-М,

$$\int_{-1}^{-2}x^3dx=-\int_{-2}^{-1}x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{-1}=-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{4}\right)=-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}.$$

Интегралды есептеңдер (31—32):

31. 1) $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx$; 2) $\int_{-2}^{1}(5-4x)\,dx$;

3) $\int_{-2}^{0}(3x^2-10)\,dx$; 4) $\int_{0}^{2}(6x^2-2x+5)\,dx$.

32. 1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos x\,dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\,dx$;

3) $\int_{-1}^{1}(5x^4+6x^2)\,dx$; 4) $\int_{-2}^{1}(4x^3+6x)\,dx$.

33. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}\,dx$; 4) $\int_{3}^{5}\frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$.

34. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{18}}(\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)\,dx$;

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{16}}(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)\,dx$;

3) $\int_{0,3}^{1,5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{x^2}\right)dx$;

4) $\int_{-2}^{-1}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)dx$.

Сабақ № 72. Анықталған интегралды алмастыру тәсілімен есептеу

Жоспары:

1. **Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру**
2. **Айнымалыны ауыстыру әдісіне байланысты есептер**

Бақылау сұрақтары:

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Анықталмаған интеграл дегеніміз не?
3. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері қандай?
4. Қосындының интегралы неге тең?
5. Интегралдан алынған туынды нені береді?
6. Анықталған интеграл дегеніміз не?
7. Ньютон- Лейбниц формуласын жаз?

Анықталған интегралды осы тәсіл бойынша есептеу анықталмаған интегралды есептеу сияқты жүргізіледі. Бірақ, бір ерекшелігі айнымалыны ауыстырғанда бастапқы айнымалыға қайтып келу керек емес.

1-М,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5xdx}{(1-x^2)^3}. \qquad 1-x^2=z. \ (1) \qquad -2xdx=dz. \quad xdx=-\frac{dz}{2}.$$

Біз жаңа айнымалы енгізгендіктен z айнымалысының шектері де басқа болады. Олар (1) теңдеуден табылады. x-тің орнына шектерін қойып есептейміз.

$Z_m = 1-0=1$ (төменгі).

$Z_m = 1-(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ (жоғарғы).

Сонымен, берілген интегралдағы $1-x^2$ пен xdx өрнектерін жаңа айнымалымен ауыстырсақ:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5xdx}{(1-x^2)^3} = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{5(-\frac{dz}{2})}{z^3} = -\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dz}{z^3} = -\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} z^{-3}dz = -\frac{5}{2} * \frac{z^{-2}}{-2}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4} * \frac{1}{z^2}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\frac{9}{16}} - \frac{1}{1}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{16}{9}-1\right) = \frac{5}{4} * \frac{7}{9} = \frac{35}{36}$$

2-М,

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3dx}{9+16x^2} = \left| \frac{3}{9}^{9/} \int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\frac{16x^2}{9}} = \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+(\frac{4}{3}x)^2} = \right| \begin{array}{l} \frac{4}{3}x = z \\ \frac{4}{3}dx = dz \\ dx = \frac{3dz}{4} \end{array} \Bigg|$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{\frac{3dz}{4}}{1+z^2} = \frac{1}{\cancel{3}} * \frac{\cancel{3}}{4}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4} * arctgz\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \frac{1}{4}\left(arctg1 - arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{^{3/}\Pi}{4} - \frac{^{2/}\Pi}{6}\right) = \frac{1}{4} * \frac{\Pi}{12} = \frac{\Pi}{48}$$

Сабақ № 72. Анықталған интегралды алмастыру тәсілімен есептеу

Бақылау сұрақтары:

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Берілген функцияның алғашқы функциясы нешеу болады?
3. Анықталмаған интеграл дегеніміз не?
4. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері қандай?
5. Қосындының интегралы неге тең?
6. Интегралдан алынған туынды нені береді?
7. Анықталған интеграл дегеніміз не?
8. Ньютон- Лейбниц формуласын жаз?
9. Анықталған интегралдың көмегімен фигуралардың аудандарын қалай табуға болады?
10. Анықталған және анықталмаған интегралдарды есептеуде алмастыру әдісін қолданудың ерекшеліктері қандай?

43. 1) $\int_0^1 (2+5x)^3\,dx$; 2) $\int_0^1 (2x+3)^3\,dx$;

3) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(6x-1)^4}$; 4) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(1-2x)^5}$.

44. 1) $\int_2^{12} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$; 2) $\int_4^{12} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

3) $\int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x+1}{1+x^2}\,dx$; 4) $\int_{-3}^{-2} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}\,dx$.

Интегралды есептеңдер (**35—37**):

35. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 2) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

3) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x\,dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx$.

36. 1) $\int_1^{1,5} (1-2x)^3\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{1}{3}} (3x+1)^3\,dx$;

3) $\int_{-1}^4 \frac{(2-x)^3}{8}\,dx$; 4) $\int_{-1}^1 \frac{(1-x)^4}{7}\,dx$.

37. 1) $\int_1^4 \frac{5\sqrt{x}}{x}\,dx$; 2) $\int_{-8}^{-3} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

3) $\int_4^{11} \frac{1}{\sqrt{x+5}}\,dx$; 4) $\int_{14}^{37} \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

Сабақ № 73. Анықталған интеграл арқылы фигуралардың аудандарын есептеу

Жоспары:

1. **Анықталған интеграл арқылы фигуралар ауданын есептеу формулаларын беру**
2. **Ох осінің төменгі бөлігінде орналасқан фигура ауданын есептеу формуласы**
3. **Мысалдар қарастыру**

Бақылау сұрақтары:

1. Алғашқы функция дегеніміз не?
2. Анықталмаған интеграл дегеніміз не?
3. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері қандай?
4. Қосындының интегралы неге тең?
5. Интегралдан алынған туынды нені береді?
6. Анықталған интеграл дегеніміз не?
7. Ньютон- Лейбниц формуласын жаз?

Берілген фигураның ауданын есептеу әдісін геометриялық мағынасын қарастырғанда өткен едік. Ал егер де берілген фигура Ох осінің төменгі жағында орналасқан болса ше?

Егер де $f(x)\langle 0$ болса, онда $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

1-М, $y=x^2-4x$ сызығы O_x осімен шектелген фигура ауданын табу керек.
Берілген функциямыз $[0;4]$ арлығында теріс. Сондықтан формула бойынша:

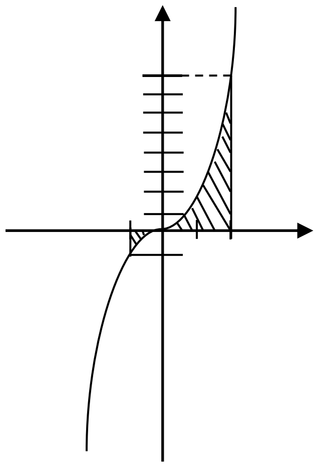
$$S=\left|\int_0^4 (x^2-4x)dx\right|=\left|(\frac{x^3}{3}-2x^2)\right|_0^4=\left|\frac{4^3}{3}-2*4^2\right|=\left|\frac{64}{3}-^{3/}32\right|=\left|\frac{64-96}{3}\right|=\left|-\frac{32}{3}\right|=\left|-10\frac{2}{3}\right|=10\frac{2}{3}$$

(кв.бірл)

Жауабы: $10\frac{2}{3}$ квадрат бірлігі.

Егер де берілген фигураның бір бөлігі оң, бір бөлігі теріс жағында орналасқан болса, онда екі интегралдың қосындысы есептеледі.

2-М, $y=x^3$ қисығы, $x=-1, x=2$ түзулері және O_x осімен шектелген фигура ауданын табу керек.



$S=S_{OCB}+S_{OAD}$.

$[0;2]$ аралығында $f(x)\rangle 0$, соедықтан $S_{OAD}=\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{2^4}{4}=4$.

Ал $[-1;0]$ $f(x)\langle 0$, сондықтан $S_{OCB}=\left|\int_{-1}^0 x^3dx\right|=\left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0\right|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$

Енді $S=S_{AOD}+S_{BOC}=4+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}$

Жауабы: $4\frac{1}{4}$ квадрат бірлігі.

47. 1) $y=2x+2$, $y=0$, $x=2$; 2) $y=x+2$, $y=0$, $x=2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңдар (жауабын геометрия пәнінен белгілі формуламен тексеріңдер).

48. 1) $y=(x-2)(2x-3)$, $y=0$; 2) $y=(3x+2)(x-1)$, $y=0$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданы неге тең?

49. Берілген сызықтармен шектелген фигуралардың ауданын есептеңдер:
1) $y=x^2-4x+4$, $y=0$, $x=0$; 2) $y=x^2+6x+9$, $y=0$, $x=0$;
3) $y=4x^2+12x+9$, $y=0$, $x=0$; 4) $y=9x^2-6x+1$, $y=0$, $x=0$.

50. $y=f(x)$ функциясының графигімен және координата осьтерімен шектелген фигураның ауданын табыңдар:
1) $f(x)=-x^2+4x-4$; 2) $f(x)=-x^2+6x-9$.

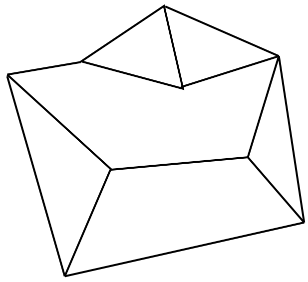
Бақылау жұмысы

I – нұсқа

1) Интегралды есептеу керек:

1). $\int\left(9x^6-5\sqrt[5]{x}-\frac{2}{7}\right)dx$

2) $\int\frac{\ell^x dx}{\sqrt{1+\ell^x}}$



3) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)\cos x dx$

2) у = x^2 – 4х + 7 сызығымен, х = 0 ,х =3 түзумен ОХ осьтерімен шектелген фигураның ауданын табу керек.

II – нұсқа

1) Интегралды есептеу керек:

1). $\int \left(8x^7 - 3\sqrt[3]{x} - \frac{5}{3} \right) dx$

2) $\int \frac{3xdx}{(1-2x^2)^2}$

3) $\int_0^1 (e^x - 1)^3 e^x dx$

2) у = x^2 + 3х–5 сызығымен, х = 0 ,х =2 түзумен ОХ осьтерімен шектелген фигураның ауданын табу керек.

Бөлім IX Геометриялық денелер мен олардың беттері

Сабақ: № 74. Көпжақтар. Призма. Бүйір беті мен толық бетінің аудандары

Жоспары:

1. **Көпжақ ұғымы**
2. **Призма анықтамасы**
3. **Призманың түрлері мен қасиеттері**
4. **Призманың бүйір беті мен толық бетінің аудандары**

Стереометрияда денелер деп аталатын фигуралар зерттеледі.

Көпжақ дегеніміз беті саны шектеулі жазық көпбұрыштардан құралатын дене. Егер көпжақ өзінің бетін құрайтын әрбір жазық көпбұрыш жазықтығының бір жағына орналасқан болса, оны ***дөңес көпжақ*** деп атайды. Осындай жазықтық пен дөңес көпжақтың бетінің ортақ бөлігі ***жақ*** деп аталады. Дөңес көпжақтың жақтары дөңес көпбұрыштар болып келеді. Жақтардың қабырғаларын – ***көпжақтың қырлары*** деп, ал төбелерін ***көпжақтың төбелері*** деп атайды.

Өздерін білетін куб (текше) дөңес көпжаққа мысал бола алады.

Куб дегеніміз дұрыс көпжақ. Бұдан басқа: призма және пирамидалар қарапайым көпжақтарға мысал болады.

Призма. Бүйір беті мен толық бетінің ауданы.

Призма деп әр түрлі жазықтықтарда жататын және параллель көшіргенде бір-біріне келіп беттесетін екі көпбұрыштан және осы көпбұрыштардың сәйкес нүктелерін қосатын барлық кесінділерден тұратын көпжақты айтады.

Көпбұрыштар – призманың ***табандары***, ал сәйкес төбелерді қосатын кесінділер призманың ***бүйір қырлары*** деп аталады.

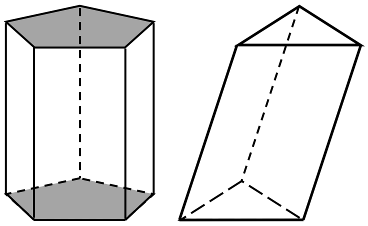
Призманың табандары тең және параллель жазықтықтарда жатады.Сонымен бірге призманың бүйір қырлары параллель және тең болады.

Призманың беті табандары ме бүйір бетінен құралады. Бүйір беті параллелограммдар болып табылады.

Призманың биіктігі деп оның табандарының ара қашықтығын айтады. Призманың бір жағына тиісті емес екі төбесін қосатын кесіндіні ***призманың диагоналі*** деп атайды.

Егер призманың табаны n-брышты болса, онда ол ***n-брышты призма*** деп аталады.

Егер призманың бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болса, онда оны ***тік призма*** деп атайды. Олай болмаған жағдайда, ***көлбеу призма*** деп аталады.



Тік призманың жақтары – тік төртбұрыштар. Егер тік призманың табандары дұрыс көпбұрыш болса, онда оны ***дұрыс призма*** деп атайды.

Призманың бүйір беті деп бүйір жақтары аудандарының қосындысын айтады. Призманың ***толық беті*** бүйір беті мен табан аудандарының қосындысына тең.

$S_{б.б} = Pa$ – тік призманың бүйір беті.

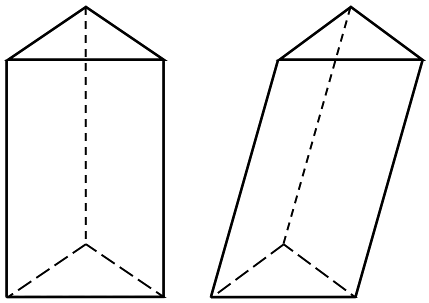
$S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб.}$ -призманың толық беті.

Есептер.

№1. Үшбұрышты тік призманың табан қабырғалары 10 см, 17 см және 21 см-ге тең, призманың биіктігі 18 см. Толық беті мен бүйір бетінің ауданын табу керек.

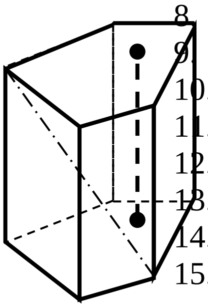
№2. Көлбеу призманың бүйір қыры 15 см және табан жазықтығына 30 градус бұрыш жасай көлбеген. Призманың биіктігін тау керек.

№3. Төрбұрышты дұрыс призманың табан ауданы 144 см^2, ал биіктігі 14 см. Призманың диагоналін табыңдар.



Бақылау сұрақтары:

1. Көпжақ дегеніміз қандай фигура?
2. Дөңес көпжақ дегеніміз не?
3. Көпжақтың жақтары дегеніміз не?
4. Бүйір қырлары деген не?
5. Төбелері қалай табылады?
6. Призма дегеніміз қандай көпжақ?
7. Биіктігі дегеніміз не?



8. Табандары деген не?
9. Бүйір беті қалай табылады?
10. Толық бетін қалай табамыз?
11. Призманың диагоналі дегеніміз не?
12. Түрлері қандай?
13. Дұрыс призма дегеніміз не?
14. Тік призманың бүйір жақтары қандай көпбұрыш?
15. Табаны үшбұрыш болатын призма қалай аталады?

Призма. Бүйір беті мен толық бетінің аудандары

Призманың бүйір беті деп бүйір жақтары аудандарының қосындысын айтады. Призманың ***толық беті*** бүйір беті мен табан аудандарының қосындысына тең.

$S_{б.б} = Ph$ – тік призманың бүйір беті.

$S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб.}$ -призманың толық беті.

Есептер:

20. Үшбұрышты тік призманың барлық қырлары тең. Бүйір беті 12 $м^2$-ге тең. Биіктігін табыңдар.

21. Төртбұрышты дұрыс призманың бүйір беті 32 $м^2$-ге тең, ал толық беті 40 $м^2$. Биіктігін табыңдар.

23. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырларының ара қашықтықтары 2 см, 3 см және 4 см, ал бүйір қырлары 5 см-ге тең. Призманың бүйір бетін табыңдар.

24. Табан қабырғасы a мен бүйір қыры b бойынша: 1) үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) алтыбұрышты дұрыс призманың толық бетін табыңдар.

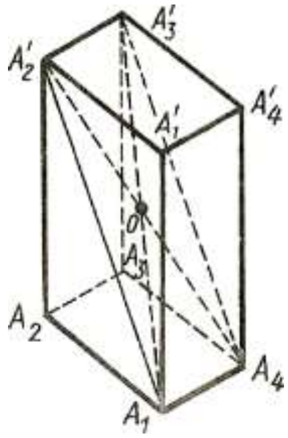
Сабақ: № 75. Параллелепипед, оның түрлері мен қасиеттері

Жоспары:

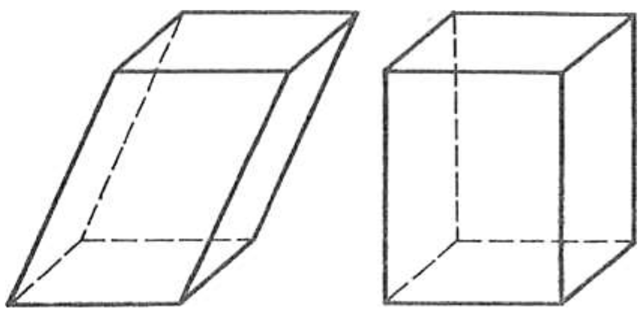
1. **Параллелепипед ұғымы**
2. **Параллелепипедтің қасиеттері**
3. **Параллелепипедтің түрлеру**
4. **Параллелепипедтің сызықтық үш өлшеуіші**

Бақылау сұрақтары:

1. Көпжақ дегеніміз қандай фигура?
2. Дөңес көпжақ дегеніміз не?
3. Көпжақтың жақтары дегеніміз не?
4. Бүйір қырлары деген не?
5. Төбелері қалай табылады?
6. Призма дегеніміз қандай көпжақ?
7. Биіктігі дегеніміз не?
8. Табандары деген не?
9. Бүйір беті қалай табылады?
10. Толық бетін қалай табамыз?
11. Призманың диагоналі дегеніміз не?
12. Түрлері қандай?
13. Дұрыс призма дегеніміз не?
14. Тік призманың бүйір жақтары қандай көпбұрыш?
15. Табаны үшбұрыш болатын призма қалай аталады?



Егер призманың табаны параллелограмм болса, онда ол *параллелепипед* деп аталады. Параллелепипедтің барлық жақтары — параллелограмдар.
412, а-суретте — көлбеу параллелепипед, ал 412, б-суретте тік параллелепипед кескінделген.

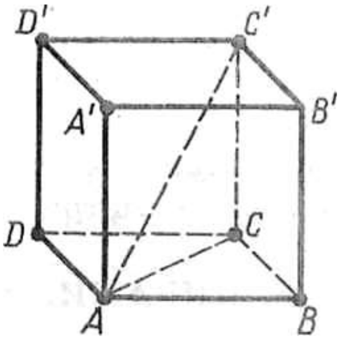


Параллелепипедтің ортақ төбелері болмайтын жақтары *қарама-қарсы жатқан жақтары* деп аталады.

Т е о р е м а . 19.2. Параллелепипедтің қарама-қарсы жатқан жақтары параллель және тең болады.

Т е о р е м а 19.3. Параллелепипедтің диагональдары бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде қақ бөлінеді.

19.3-теоремадан параллелепипедтің **диагональдарыныц** қиылысу нүктесі оныц симметрия центрі болып **табылаты**дығы ***шығады.***



Табаны тік төртбұрыш болатын тік параллелепипед тік *бұрышты параллелепипед* деп аталады. Тік бұрышты параллелепипедтің барлық жақтары — тік төртбұрыштар.

Барлың қырлары тең болатын тік бұрышты параллелепипед *куб* деп аталады.

Тік бұрышты параллелепипедтің параллель емес қырларының ұзындықтары оның *сызықтық өлшемдері (өлшеуіштері)* деп аталады. Тік бұрышты параллелепипедтің сызықтық үш өлшеуіші бар.

Т е о р е м а 19.4. Тік бұрышты параллелепипедтің кез келген диагоналының квадраты оның **сызықтық үш өлшеуішінің** квадраттарының қосындысына тең болады.

Д ө л е л д е у . $ABCDA'B'C'D'$ т і к бұрышты параллелепипедің қарастырамыз (415-сурет). Пифагор теоремасы бойынша тік бұрышты АС'С үшбұрышынан: $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$.

Пифагор теоремасы бойынша тік бұрышты ACB үшбұрышынан

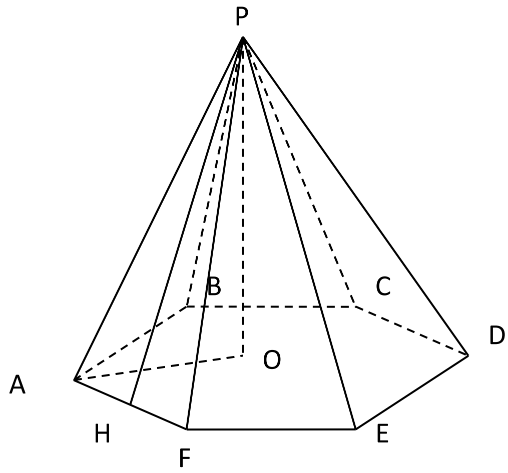
$AC'^2 = AB^2 + BC^2$ болып шығады. Бұдан

$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2$.

АВ, ВС және СС қырлары параллель емес, олай болса, олардың ұзындықтары параллелепипедтің сызықтық өлшемдері болып табылады. Теорема дәлелденді.

Есептер.

25. Параллелепипедтің үш жағының ауданы: 1м^2, 2м^2 және 3 м^2. Параллелепипедтің толық беті неге тең?
26. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 6 м және 8 м- ге тең және олар 30° бұрыш жасайды, бүйір қыры 5 м-ге тең. Осы параллелепипедтің толық бетін табыңдар.
27. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 3 см және 8 см, олардың арасындағы бұрышы 60°. Бүйір беті 220 см^2-ге тең. Толық бетін табыңдар.
28. Тік параллелепипедтің әрбір ңыры а-ға тең, ал табандарындағы бүрышы 60°-қа тең. Параллелепипедтің диагональдарын табыңдар.
29. Берілген үш өлшемі: 10 см, 22 см, 16 см бойынша тік бұрышты параллелепипедтің бетін табыңдар.



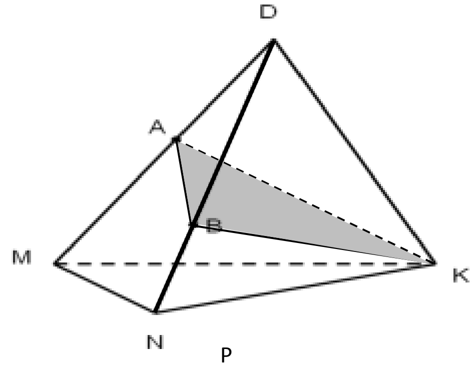
Сабақ: № 76. Пирамида. Пирамиданың параллельдік қимасының қасиеттері.Бүйір беті мен толық бетінің ауданы.

Жоспары:

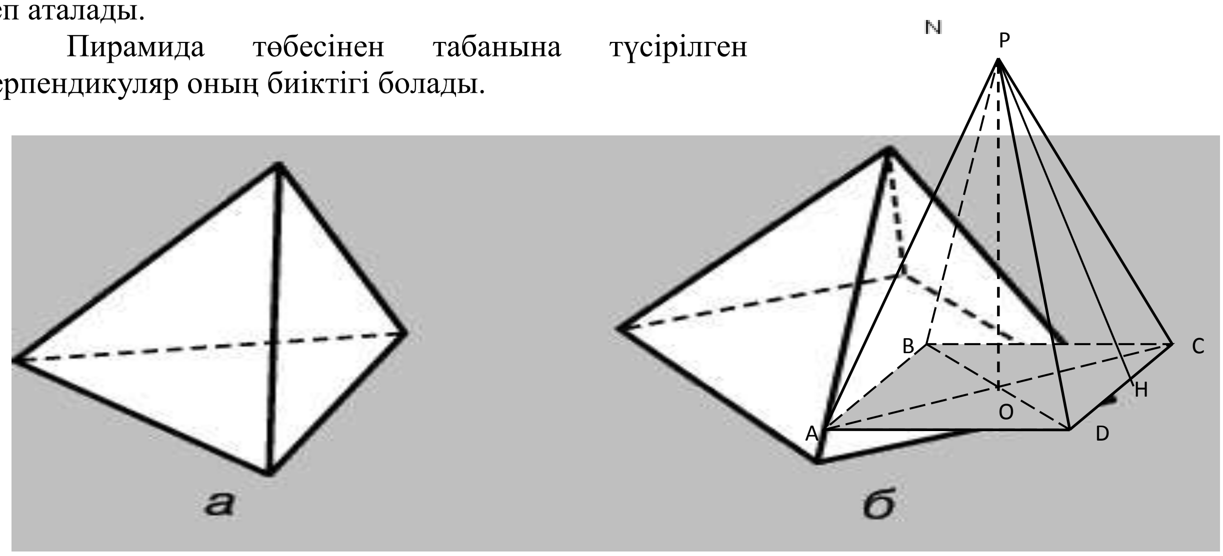
1. **Пирамида ұғымы**
2. **Пирамиданың негізгі қасиеттері**
3. **Пирамиданың негізгі түрлері**
4. **Дұрыс пирамиданың бүйір беті мен толық бетінің аудандарының формулалары**

$A_1A_2A_3...A_n$ көпбұрышы мен одан тыс Р нүктесін қарастырайық. Р нүктесін көпбұрыштың қабырғаларымен қоссақ, онда $PA_1A_2, PA_2A_3,...$ n үшбұрыштары пада болады.

Пирамида бұл – $A_1A_2A_3...A_n$ көпбұрышы мен оның әрбір нүктесін Р нүктесімен қосатын кесінділерден құрылған дене. $A_1A_2A_3...A_n$ көпбұрышы пирамида табаны деп, ал үшбұрыштар бүйір жақтары, қабырғалары пирамида қырлары деп аталады.. Р нүктесі төбесі болады. $PA_1A_2A_3...A_n$ n-бұрышты пирамида деп аталады.Табаны үшбұрыш болатын пирамида тетраэдр деп аталады.



Пирамида төбесінен табанына түсірілген перпендикуляр оның биіктігі болады.



Барлық жақтарының қосындысы пирамида толық беті деп, бүйір жақтарының қосындысы бүйір беті деп аталады.

$$S_{т.б.} = S_{б.б.} + S_{таб.}$$

Дұрыс пирамида дегеніміз табаны дұрыс көпбұрыш болатын пирамида. Оның бүйір жақтары теңбүйірлі үшбұрыштар болады. Дұрыс пиармиданың апофемасы деп оның бүйір жағының биіктігін айтады. PH пирамида апофемасы. PO- пирамида биіктігі.

Дұрыс пирамиданың ең қарапайым түрі – тетраэдр. Тетраэдр-үшбұрышты дұрыс пирамиданың түрі.

Дұрыс пирамиданың бүйір беті табан периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең.

$$S_{б.б.} = \frac{1}{2} pl$$

мұндағы ***l***- апофема, ***p***- табан периметрі.

Пирамиданың параллель қимасы.

Пирамиданы төбесі арқылы өтетін жазықтықтармен қиғандағы қималары үшбұрыштар болады. Дербес жағдайда, диагональдық қималар үшбұрыштар болады. Бұл – пирамиданың көршілес емес екі бүйір қыры арқылы өтетін жазықтықтармен қиғанда шығатын қималар.

Есептер:

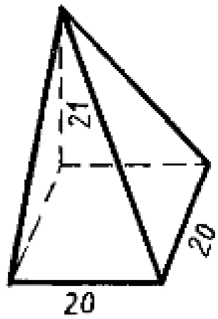
1. Алты бұрышты дұрыс пирамиданың өзінің апофемасы k, табанының апофемасы r. Осы пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.
2. Төрт бұрышты дұрыс пирамиданың биіктігі h: апофема табан жазықтығының арасындағы бұрыш 45^0. Табанының қабырғалары 120см және 209см. Пирамиданың биіктігін табыңдар.
3. Үшбұрышты дұрыс пирамиданың биіктігі 4см, апофемасы 8 см. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

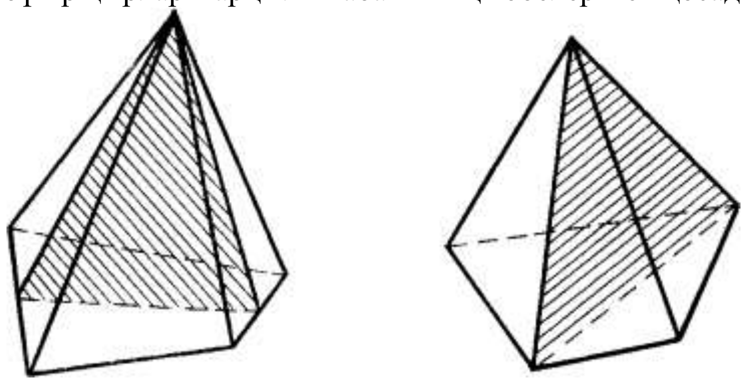
Сабақ: № 77. Пирамида. Пирамиданың параллельдік қимасының қасиеттері.Бүйір беті мен толық бетінің ауданы.

Жоспары:

1. **Пирамиданың қималары**
2. **Пирамиданың диагональдік қимасы**

Параллель проекциялау ережелеріне сәйкес пирамиданың кескінін төмендегідей салады. Ең алдымен табаны салынады. Бұл қандай да бір жазық көпбұрыш. Сонан соң пирамиданың төбесін белгілейді де, оны бүйір қырлары арңылы табанының төбелерімен қосады.





421-сурет 422-сурет

Пирамиданы төбесі арқылы өтетін жазықтықтармен қиғандағы қималары үшбұрыштар болып келеді (419-сурет). Дербес жағдайда, *диагоналъдық қималар* үшбұрыштар болады. Бұл — пирамиданың көршілес емес екі бүйір қыры арқылы өтетін жазықтықтармен қиғанда шығатын қималар (420-сурет).

Жазықтықтың пирамиданың табан жазықтығындағы g ізі берілген жағдайда пирамиданың осы жазықтықпен қиғанда шығатын қимасын призманың қимасын салғандағыдай етіп салады. Пирамиданың жазықтықпен қиғандағы қимасын салу үшін, оның бүйір жақтарының қиюшы жазықтықпен қиылысуын салу жеткілікті.

Егер g ізге параллель емес жақтың қимаға тиісті қандай да бір А нүктесі белгілі болса, онда қиюшы жазықтықтың g ізінің осы жақ жазықтығымен қиылысуын — 421-суреттегі D нүктесін салады. D нүктесін А нүктесімен түзу арқылы қосады. Сонда осы түзудің жаққа тиісті кесіндісі осы жақ пен қиюшы жазықтықтың қиылысуы болып шығады. Егер А нүктесі g ізіне параллель жаңта жатса, онда ңиюшы жазықтық бұл жақты g түзуіне параллель кесіндінің бойымен қиып өтеді. Көршілес. бүйір жақңа ауысып, оның қиюшы жазықтықпен қиылысуын салады және т. с. с. Нәтижесінде пирамиданың қажет болып отырған қимасы шығады.

422-суретте төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасымен оның бүйір қырларының бірінде жатқан А нүктесі арқылы өтетін жазықтықпен қиғандағы қимасы салынып көрсетілген.

Есептер:

48. Пирамиданың табаны — тең бүйірлі үшбұрыш, оның қабырғалары: 40 см, 25 см және 25 см. Пирамиданың биіктігі 40 см-ге тең қабырғаға қарсы жатқан бұрыштың төбесінен өтеді және ол 8 см-ге тең. Оның бүйір бетін табыңдар.
49. Пирамиданың табаны — квадрат, оның биіктігі табанының бір төбесінен өтеді. Пирамиданың табан қабырғасы 20 дм, ал биіктігі 21 дм деп алып, оның бүйір бетін табыңдар (сурет).
50. Пирамиданы оның төбесі мен табанындағы берілген екі нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда шығатын қимасын салыңдар.
51. Үшбұрышты пирамиданы табанының бір қабырғасы мен оған қарама-қарсы жатқан қырындағы берілген нүкте арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда шығатын қиманы салыңдар.

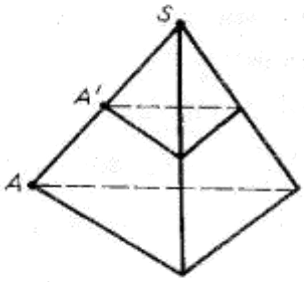
Сабақ: № 78. Қиық пирамида. Бүйір беті мен толық бетінің ауданы

Жоспары:

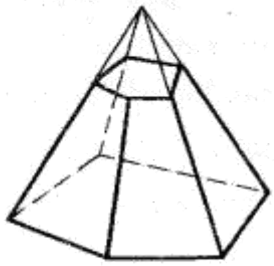
1. **Пирамиданы жазықтықпен қию**
2. **Қиық пирамида ұғымы**
3. **Дұрыс қиық пирамиданың бүйір беті мен толық бетінің аудандарының формулалары**

Т е о р е м а 19.5. Пирамиданы қиып өтетін табанына параллель жазықтық одан ұқсас пирамида қиып түседі.

19.5-теорема бойынша пирамиданың табан жазықтығына параллель және оның бүйір қырларын қиып өтетін жазықтық одан ұқсас пирамида қиып түсіреді. Ал, оның екінші бөлігі көпжақ болып шығады, ол *қиық пирамида* деп аталады (424-сурет). Қиық пирамиданың параллель жазықтықтарда жататын жақтары *табандары* деп аталады; қалған жақтары *бүйір жақтары* деп аталады. Қиық пирамиданың табандары — ұқсас көпбұрыштар, бүйір жақтары трапециялар болып келеді.



423-сурет


424-сурет

Бір табанының қандай да бір нүктесінен екінші табанының жазықтығына жүргізілген перпендикуляр **қиық пирамиданың биіктігі** деп аталады.

Егер қиық пирамида дұрыс пирамида мен оның параллель жазықтықтың қимасынан пайда болса, дұрыс қиық пирамида деп аталады. Дұрыс қиық пирамиданың табандары – дұрыс көпбұрыштар, ал бүйір жақтары теңбүйірлі трапециялар. Бұл трапециялардың биіктіктері **апофемалар** деп аталады.

Қиық пирамиданың бүйір жақтары аудандарының қосындысы қиық пирамиданың бүйір бетінің аудаы деп аталады.

Дұрыс қиық пирамиданың бүйір беті екі табанының периметрлерінің қосындысының жартысы мен апофемасының көбейтіндісіне тең болатыды

$$S_{b.b} = (p_1 + p_2)\frac{l}{2}$$

$$S_{t.b} = S_{b.b} + S_1 + S_2$$

Есептер:

52. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың биіктігі 7 см-ге тең. Табандарының қабырғалары 10 см-ге және 2 см-ге тең. Пирамиданың бүйір қырын табыңдар.

53. Үшбұрышты дұрыс қиық пирамида табандарының қабырғалары 4 дм және 1 дм. Бүйір қыры 2 дм. Пирамида биіктігін табыңдар.

54. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың биіктігі 2 см, ал табан қабырғасы 3 см және 5 см-ге тең. Осы пирамиданың диагоналын табыңдар.

55. Үшбұрышты дұрыс қиық пирамида табандарының қабырғалары 2 см және 6 см. Бүйір жағы үлкен табанымен 60° бұрыш жасайды. Биіктігін табыңдар.

56. Төртбұрышты дұрыс қиың пирамиданың биіктігі 4 см-ге тең. Табан қабырғалары 2 см-ге және 8 см-ге тең. Диагональдық қималарының аудандарын табыңдар.

57. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың табан қабырғалары 8 м және 2 м. Биіктігі 4 м. Толық бетін табыңдар.

Сабақ: № 80. Цилиндр, конус, қиық конус. Бүйір беті мен толық бетінің ауданы.

Жоспары:

1. **Цилиндр ұғымы**
2. **Цилиндрдің бүйір беті мен толық бетінің ауданы**
3. **Конус ұғымы**
4. **Конустың бүйір беті мен толық бетінің ауданы**
5. **Қиық конус ұғымы**
6. **Қиық конустың бүйір беті мен толық бетінің ауданы**

Цилиндр бұл – параллель жазықтықтарда орналасқан екі тең дөңгелек пен осы дөңгелектердің сәйкес нүктелерін қосатын кесінділерден құрылған дене. Дөңгелектер оның табандары, ал кесінділер жасаушылары деп аталады. Жасаушылардың жиыны цилиндрлік бетті құрайды, оны цилиндрдің бүйір беті деп те атайды. Цилиндрдің толық беті дегеніміз бүйір беті мен табан аудандарының қосындысы. Цилиндрдің биіктігі ол жасаушысының ұзындығы болып табылады. Ал табан радиусы цилиндрдің радиусын береді.

Цилиндрді так төртбұрышты өзінің бір қабырғасынан айналдыру арқылы алуға болады. Қабырғасы цилиндрдің осі деп аталады.

Цилиндрдің бйір беті мына формула арқылы есептеледі.

$$S_{б.б.} = 2\pi rh$$

мұндағы r – табан радиусы, h – цилиндр биіктігі.

Ал толық беті

$S_{т.б.} = 2\pi r(r+h)$ немесе $S_{т.б.} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

формулаларымен есептеледі.

Конус. Центрі О нүктесі болатын шеңбер мен оған перпендикуляр ОР кесіндісін қарастырайық. Егер шеңбердің әрбір нүктесін Р нүктесімен қосатын болсақ, конустық бет пайда болады. Шеті шеңбер болатын дөңгелек пен конустық бетпен шектелгендене конус деп аталады. Берілген кесінділер жасаушылар деп аталады, ал дөңгелек табаны деп аталады. ОР перпендикуляры конустың биіктігі болады. Сонымен бірге конусты тік бұрышты үшбұрышты өзінің бір катетінен айналдыру арқылы алуға болады. Берілген катет конустың осі болады.

Конустың бүйір беті мына формула арқылы есептеледі:

$$S_{б.б.} = \frac{2\pi l^2}{360} \cdot \alpha ,$$

мұндағы α - АВА1 доғасының градустық өлшемі, l - конустың жасаушысы.

Немесе $S_{б.б.} = \pi rl$

Толық беті ше:

$$S_{т.б} = \pi rl + \pi r^2$$

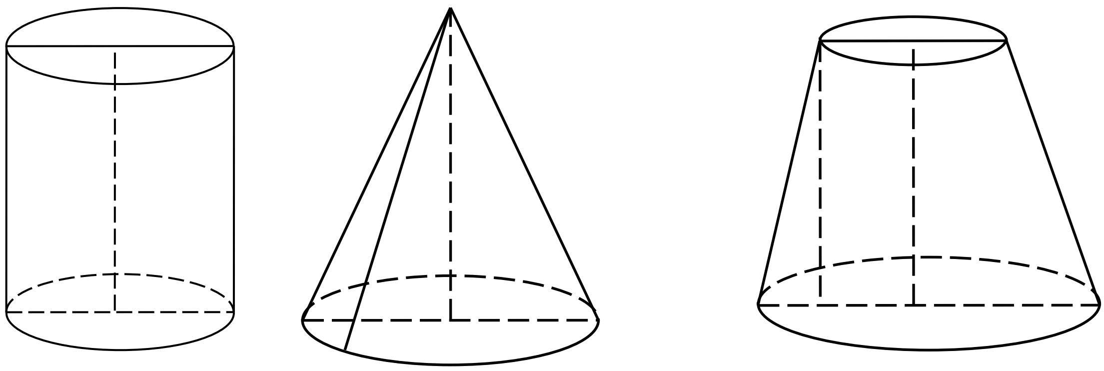
Егер конусты табанына параллель жазықтықпен қисақ, онда конус екі бөлікке бөлінеді. Оның үстінгі бөлігі конус берілген конусқа ұқсас конус болады да, ал төменгі бөлігі қиық конус болады. Пайда болған қиық конустың екі дөңгелектері оның табандары болады. Олар бір біріне ұқсас болады. Табандарының арасындағы қашықтық оның биіктігі болады. Табандарын қосатын кесінділер қиық конустың жасаушылары болады.

Қиық конусты тікбұрышты трапецияны бір қабырғасынан айналдыру арқылы алуға болады. Берілген қабырға оның осі болады. Бүйір беті мына формула арқылы есептеледі:

$S_{б.б.} = \pi(r_1 + r_2)l$, мұндағы r_1, r_2 - табан радиустары, l - қиық конустың жасаушысы.

Толық беті мына формула арқылы есептеледі:

$$S_{т.б.} = \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$



Сабақ: № 81. Цилиндр конус және қиық конустың осьтік қималары

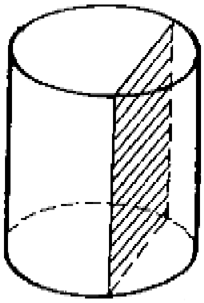
Жоспары:

1. **Цилиндрді жазықтықпен қию**
2. **Конусты жазықтықпен қиғандағы қимасы**
3. **Қиық конусты жазықтықпен қиғандағы қимасы**

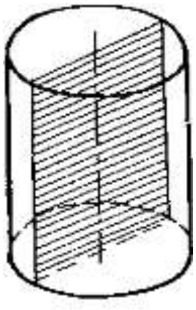
Бақылау сұрақтары:

1. Қандай айналу денелерін білесіңдер?
2. Цилиндр дегеніміз не?
3. Тік цилиндр дгеніміз не?
4. Цилиндрдің табаны дегеніміз не?
5. Цилиндрдің жасаушысы дегеніміз не?
6. Цилиндрдің табаны қандай фигура болады?
7. Цилиндрдің биіктігі дегеніміз не?
8. Цилиндрдің бүйір беті неден құралады?
9. Цилиндрдің толық бетін қай формуламен есептейді?
10. Конус дегеніміз не?
11. Конустың биіктігі дегеніміз не?
12. Конустың жасаушысы дегеніміз не?
13. Конустың бүйір бетін қалай есептейміз?
14. Конустың толық бетін есептеу формуласы?
15. Қиық конус дегеніміз е?
16. Қиық конустың бүйір бетін қалай табады?
17. Қиық конустың толық бетін қалай есептейді?
18. Қиық конустың жасаушысы дегенімз не?
19. Қиық конустың табандары қандай фигуралар болады?
20. Қиық конус пен цилиндрдің арасында қандай айырмашылық бар?

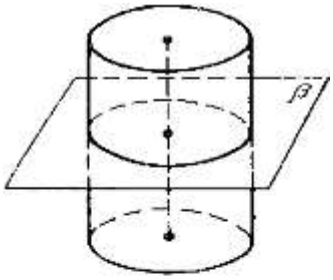
Цилиндрді осіне параллель жазықтықпен қиғанда қимасы тік төртбұрыш болып шығады (435-сурет). Оның екі қабырғасы — цилиндрдің жасаушылары, ал қалған екеуі табандарының параллель хордалары болады. Дербес жағдайда, *осътік қима* тік төртбұрыш болып табылады. Бұл — цилиндрдің осі арқылы өтетін жазықтықпен қиғандағы қима (436- сурет).



435-сурет



436-сурет



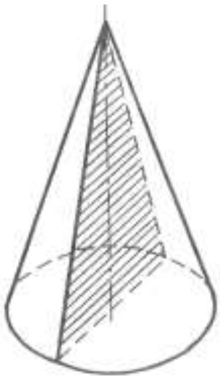
437-сурет

Цилиндрдің табанына параллель жазықтық оның бүйір бетін табан шеңберіне тең болатын шеңбер бойымен қиып өтеді.

Конустың қималары.

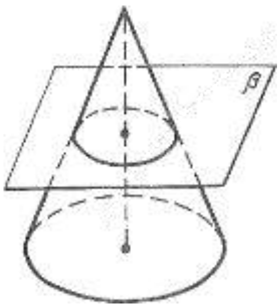
Конустың төбесі арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда қимада бүйір қабырғалары конустың жасаушылары болып табылатын, тең бүйірлі үшбұрыш шығады (444-сурет). Дербес жағдайда, конустың осьтік қимасы тең бүйірлі үшбұрыш болады. Осьтік қима конустың осі арқылы өтеді (445-сурет).

Конустың табан жазықтығына параллель жазықтық конусты дөңгелек бойымен, ал бүйір бетін центрі конустың осінде жататын шеңбер бойымен қиып өтеді.



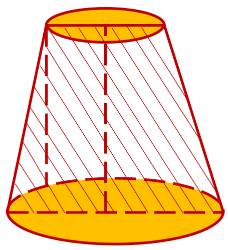
445-сурет

444-сурет



Қиық конусты осіне параллель жазықтықпен қиғанда қимасында трапеция пайда болады, дербес жағдайда осьтік қимасы *тең бүйірлі* трапеция болады.

Табанына параллель жазықтықпен қиғанда қимасында дөңгелек пайда болады.



1. Цилиндр табанының радиусы 2 м, биіктігі 3 м. Осьтік қимасының диагоналын табыңдар.
2. Конустың биіктігі 20, табан радиусы 25. Төбесі арқылы жүргізілген қимадан конус табанының центріне дейінгі қашықтық 12-ге тең, қима ауданын табыңдар.
3. Цилиндрдің биіктігі 8 дм, табан радиусы 5 дм. Цилиндр қимасында квадрат шығатындай етіп, жазықтықпен қиылған. Осы қимадан оське дейінгі қашықтықты табыңдар.

20. Қиық конус табандарының радиустары 3 дм және 7 дм, жасаушысы 5 дм. Осьтік қима ауданын табыңдар.
21. Қиық конус табандарының аудандары 4 дм^2 және 16 дм^2. Биіктігінің ортасынан табандарына параллель жазықтық жүргізілген. Қиманың ауданын табыңдар.

Сабақ: № 82. Шар. Шар бетінің ауданы

Жоспары:

1. **Шар ұғымы**
2. **Шарды жазықтықпен қию**
3. **Шар бетінің ауданы**

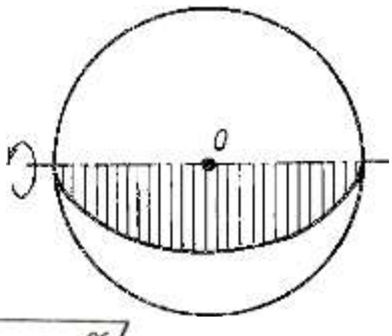
Бақылау сұрақтары:

Қандай айналу денелерін білесіңдер?

2. Цилиндр дегеніміз не?
3. Тік цилиндр дгеніміз не?
4. Цилиндрдің табаны дегеніміз не?
5. Цилиндрдің жасаушысы дегеніміз не?
6. Цилиндрдің табаны қандай фигура болады?
7. Цилиндрдің биіктігі дегеніміз не?
8. Цилиндрдің бүйір беті неден құралады?
9. Цилиндрдің толық бетін қай формуламен есептейді?
10. Конус дегеніміз не?
11. Конустың биіктігі дегеніміз не?
12. Конустың жасаушысы дегеніміз не?
13. Конустың бүйір бетін қалай есептейміз?
14. Конустың толық бетін есептеу формуласы?
15. Қиық конус дегеніміз е?
16. Қиық конустың бүйір бетін қалай табады?
17. Қиық конустың толық бетін қалай есептейді?
18. Қиық конустың жасаушысы дегенімз не?
19. Қиық конустың табандары қандай фигуралар болады?
20. Қиық конус пен цилиндрдің арасында қандай айырмашылық бар?

Шар деп берілген нүктеден берілген қашықтықтан артық емес қашықтықта жататын кеңістіктің барлық нүктелерінен тұратын денені атайды. Бұл нүкте *шардың центрі* деп, ал берілген ара қашықтық *шардың радиусы* деп аталады.

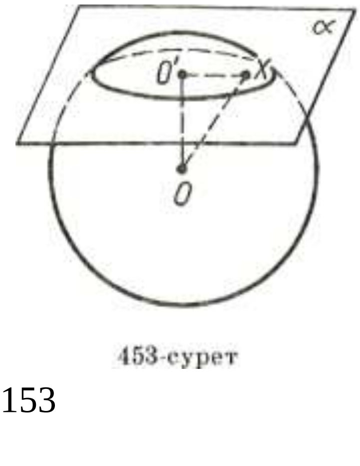
Шардың шекарасы *шардың беті* немесе *сфера* деп аталады. Сонымен, сфера нүктелері центрден радиусқа тең ара қашықтықта жататын сол шардың нүктелері болып табылады. Шардың центрін шар бетінің нүктесімен қосатын кез келген кесінді де шардың радиусы деп аталады.



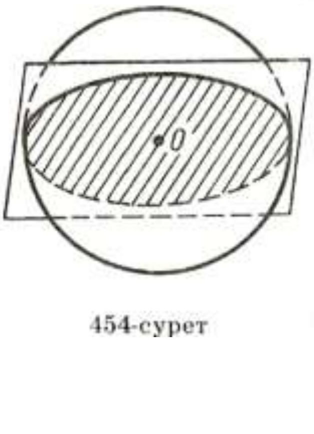
Шар бетінің екі нүктесін қосатын және шардың центрінен өтетін кесінді *диаметр* деп аталады. Кез келген диаметрдің *ұштары* шардың диаметрлік қарама-қарсы нүктелері *деп аталады.*

Шар да, цилиндр мен конус сияқты, айналу денесі болып табылады. Ол жарты дөңгелекті ось ретінде диаметрден айналдырғанда шығады (452-сурет).

Шарды жазықтықпен қиғандағы кез келген қимасы дөңгелек болады. Бұл дөңгелектің центрі шардың центрінен қиюшы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табаны болып табылады.



453-сурет



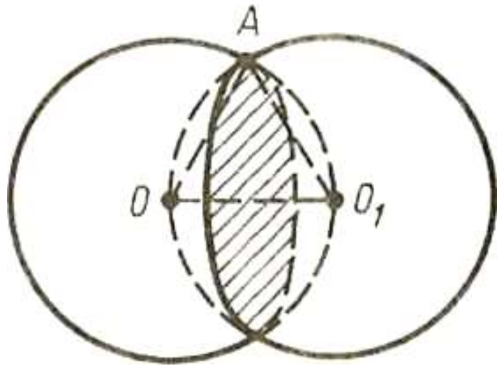
454-сурет

Шардың центрінен өтетін жазықтық *диаметрлік жазықтық* деп аталады. Шардың диаметрлік жазықтықпен қиғандағы қимасы — *үлкен дөңгелек* (454-сурет) деп, ал сфераның қимасы *үлкен* *шеңбер* деп аталады.

Шардың кез келген диаметрлік жазықтығы оның симметрия жазықтығы болып табылады. Шардың центрі оның симметрия центрі болып табылады.

Екі сфераның қиылысу сызығы шеңбер болады.

Есептер.



29. Радиусы 41 дм шар центрінен 9 дм қашықтықта жазықтықпен қиылған. Қиманың ауданын табыңдар.
30. Шар радиусының ортасынан оған перпендикуляр жазық- тық жүргізілген. Шыққан қима ауданының үлкен дөңгелек ауданына қатынасы қандай болады?

    Шардың радиусы *R*. Радиустың ұшынан оған 60° бұрышпен жазықтық жүргізілген. Қима ауданын табыңдар
31. N қаласы 60^0 солтүстік ендікте орналасқан. Жердің өз осінен айналуы салдарынан бұл пункт 1 сағ ішінде қандай жол жүреді? Жердің радиусын' 6000 км деп алың- дар.
32. Шар бетінен үш нүкте берілген. Олардың түзу сызықты ара қашықтығы 6 см, 8 см және 10 см. Шар радиусы 13 см. Шар центрінен осы нүктелер арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтыңты табыңдар.
33. Шардың диаметрі 25 см. Оның бетінен А нүктесі және барлық нүктелері А-дан 15 см қашықтықта жататын (түзу бойымен) шеңбер берілген. Осы шеңбердің радиусын табыңдар.

Бөлім X Геометриялық денелердің көлемдері

Сабақ: № 83. Призма көлемі.

Жоспары:

1. **Көлем ұғымы**
2. **Параллелепипедтің көлемі**
3. **Призма көлемі**

Бақылау сұрақтары:

1. Призма дегеніміз қандай фигура?
2. Оның қандай түрлері бар?
3. Параллелепипед дегеніміз не?
4. Оның қандай түрлері бар?
5. Негізгі элементтерін атаңдар?

КӨЛЕМ ҰҒЫМЫ

Жазықтықтағы фигуралар үшін аудан ұғымы енгізілгені сияқты, кеңістіктегі денелер үшін көлем ұғымы енгізіледі. Ең алдымен қарапайым денелерді ғана қарастырамыз. Егер денені саны шектеулі үшбұрышты пирамидаларға бөлшектеуге болатын болса, онда оны *қарапайым дене* деп атайды.

Қарапайым денелер үшін көлем — оң шама, оның сандық мәнінің төмендегідей қасиеттері бар:

1. *Тең денелердің көлемдері тең болады.*

2. *Егер дене қарапайым денелер болып табылатын бөліктерге бөлшектенетін болса, онда бұл дененің көлемі оның бөліктерінің көлемдерінің қосындысына тең болады.*

3. *Қыры ұзындық бірлігіне тең кубтың көлемі бірге тең болады.*

Егер анықтамада айтылып отырған кубтың қыры 1 см болса, онда көлемі бір куб сантиметр, егер кубтың қыры 1 м болса, онда көлемі бір куб метр, егер кубтың қыры 1 км болса, онда көлемі бір куб километр және т. с. с. болады. Кез келген дөңес көпжақ қарапайым дененің мысалы бола алады. Оны саны шектеулі үшбұрышты пирамидаларға

былайша бөлшектеуге болады. Көпжақтың қандай да бір *S* төбесін белгілеп алайық. Көпжақтың S төбесін қамтымайтын барлық жақтарын ұшбұрыштарға бөлшектейміз. Сонда
табандары — осы үшбұрыштар, ал ортақ төбесі *S* нүктесі болатын үшбұрышты пирамидалар көпжақтың үшбұрышты пирамидаларға бөлшектенуін береді.

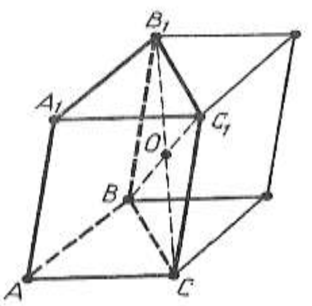
Сызықтық өлшемдері *a, b, c* болатын ***тік бұрышты параллелепипедтің*** көлемін
V = abc

формуласымен есептеп шығарады.

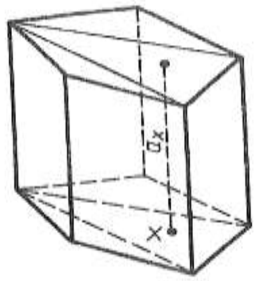
Кез келген параллелепипедтің көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.

Үшбұрышты призманы қарастырамыз (478-сурет). Оны суретте көрсетілгендей етіп, параллелепипедке дейін толықтырамыз. О нүктесі параллелепипедтің симметрия центрі болып табылады. Сондықтан толықтырылған призма бастапқы призмамен О нүктесіне қарағанда симметриялы, ендеше, көлемі бастапқы призманың көлеміне тең болады. Сонымен, салынған параллелепипедтің көлемі берілген призманың екі еселенген көлеміне тең. Параллелепипедтің көлемі табан ауданын биіктігіне көбейткенге тең. Оның табан ауданы ABC үшбұрышының екі еселенген ауданына тең, ал биіктігі бастапқы призманың биіктігіне тең. Бұдан бастапқы призманың көлемі табан ауданын биіктігіне көбейткенге тең болады деген қорытынды шығарамыз.

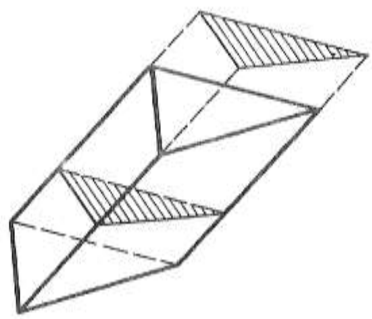
Еркімізше алынған призманы қарастырайық (479- сурет). Берілген призманың көлемі



478-сурет



479-сурет



480-сурет

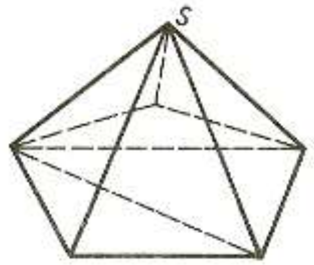
оны құрайтын үшбұрышты призмалардың көлемдерінің қосындысына тең. Дәлелденген бойынша үшбүрышты призманың көлемі табан ауданын биіктігіне көбейткенге тең. Осыдан берілген призманың көлемі мынаған тең болып шығады:

$F = S_1H + S_2H + \cdots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H$, мұндағы $S_1, S_2, \ldots$ — призма табаны бөлінген үшбұрыштардың аудандары, ал H — призманың биіктігі. Үшбұрыштар аудандарының қосындысы берілген призма табанының ауданына тең. Сондықтан, к*ез келген призманың көлемі табан ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады.*

V = SH.

1. Қырлары 3 см, 4 см жэне 5 см болатын уш жез кубты балқытып, 6ір куб құйып шығарған. Осы кубтың қыры қандай болады?
2. Металл кубтың сыртқы қыры 10,2 см және массасы 514,15 г. Қабырғасының қалыңдығы 0,1 см-ге тең. Куб жасалған металдың тығыздығын табыңдар.
3. Егер кубтың әр қырын 2 см-ге арттырса, оның көлемі 98 $см^3$-ге артады. Кубтың қыры неге тең?
4. Егер кубтың әр қырын 1 м-ге арттырса, оның көлемі 125 есе артады. Кубтың қыры неге тең?
6. Су құюға арналғак сыйымдылығы 10 $м^3$ резервуарды, оның түбі болып есептелетін, өлшемі 2,5Х1,75 м орынға орнату қажет. Резервуардың биіктігін табыңдар.

7. Тік бұрышты параллелепипедтің өлшемдері 15 м, 50 м және 36 м. Оған тең шамалы кубтың қырын табыңдар.
8. Тік бұрышты білеушенің өлшемдері 3 см, 4 см және 5 см. Әрбір қырын χ см арттырса, онда оның беті 54 см^2 артады. Оның көлемі қалай артады?
9. Шойын құбырдың көлденең қимасы квадрат тәрізді, оның сыртқы ені 25 см, қабырғасының қалыңдығы 3 см. Құбырдың бір погондық метрінің массасы қандай (шойынның тығыздығы 7,3 г/см^3)?



12. Тік параллелепипед табанының қабырғалары $2\sqrt{2}$ см және 5 см, олар өзара 45° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің кіші диагоналы 7 см. Оның көлемін табыңдар.
20. Дұрыс сегізбұрыш тәрізді ағаш плитаның қабырғасы 3,2 см, қалыңдығы 0,7 см және массасы 17,3 см. Ағаштың тығыздығын табыңдар.
27. Темір жолға төгілген қиыршық тас үйіндісі трапеция тәрізді, оның төменгі табаны 14 м, жоғарғы табаны 8 м және биіктігі 3,2 м. 1 км үйіндіде қанша куб метр қиыр- шық тас бар екенін табыңдар.
28. Үшбұрышты тік призманың табандарының қабырғалары 4 см, 5 см және 7 см, бүйір қыры табанының үлкен биіктігіне тең. Призманың көлемін табыңдар.
29. Үшбұрышты тік призманың табанының ауданы 4 см^2-ге тең, ал бүйір жақтарының аудандары 9 см^2, 10 см^2 және 17 см^2. Көлемін табыңдар.

Сабақ: № 84. Пирамида, қиық пирамида көлемі.

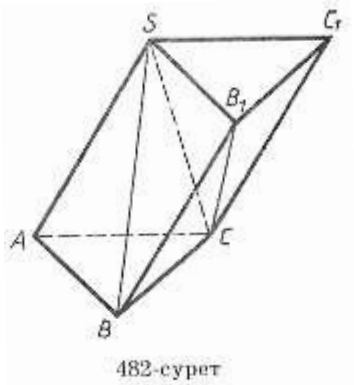
Жоспары:

1. **Пирамида көлемі ұғымы**
2. **Пирамида көлемінің формуласы**

Бақылау сұрақтары:

1. Призма дегеніміз қандай фигура?
2. Оның қандай түрлері бар?
3. Параллелепипед дегеніміз не?
4. Оның қандай түрлері бар?
5. Негізгі элементтерін атаңдар?
6. Көлемнің негізгі қасиеттері?
7. Призманың көлемі қалай есептеледі?

8. Параллелепипедтің көлемі қалай есептеледі?



482-сурет

Айталық, *SABC* төбесі *S* және табаны *ABC* болатын үшбұрышты пирамида болсын. Бұл пирамиданы табаны мен биіктігі дәл сондай үшбұрышты призмаға дейін толықтырамыз (482-сурет). Бұл призма үш пирамидадан құралады.

Екінші және үшінші пирамидалардың табандары өзара тең және S төбесінен жүргізілген биіктігі ортақ. Сондықтан олардың көлемдері тең болады.

Бірінші және үшінші пирамидалардың да табандары тең және C төбесінен жүргізілген биіктіктері беттесіп түседі. Сондықтан олардың көлемдері де тең.

Демек, барлық үш пирамиданың көлемдері бірдей. Бұл көлемдердің қосындысы призманың көлеміне тең болатындықтан, пирамидалардың көлемдері $\frac{SH}{3}$-ке тең болады.

Кез келген пирамиданың көлемі оның табан ауданы мен биіктігі көбейтіндісінің үштен біріне тең болады:

$$\boxed{V = \frac{SH}{3}}$$

Есептер:

19. Табан қабырғасы a мен бүйір қыры b бойынша: 1) үшбұрышты; 2) төртбұрышты; 3) алтыбұрышты дүрыс пирамиданың көлемін табыңдар.
20. Алтыбұрышты дүрыс пирамиданың табан қабырғасы a-ға, ал табанындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
38. Пирамиданың табаны — қабырғалары 9 м және 12 м болатын тік төртбүрыш: барлық бүйір қырлары 12,5 м-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
41. Үшбүрышты пирамиданың бір қыры 4 см, ал қалғандарының әрқайсысы 3 см-ден. Пирамиданың көлемін табыңдар.

Сабақ: № 84. Қиық пирамида көлемі.

Жоспары:

1. **Қиық пирамида ұғымы**
2. **Қиық пирамиданың көлемінің формуласы**

Бақылау сұрақтары:

1. Призма дегеніміз қандай фигура?
2. Оның қандай түрлері бар?
3. Параллелепипед дегеніміз не?
4. Оның қандай түрлері бар?
5. Негізгі элементтерін атаңдар?
6. Көлемнің негізгі қасиеттері?
7. Призманың көлемі қалай есептеледі?
8. Параллелепипедтің көлемі қалай есептеледі?

Есеп (44). Табандарының аудандары Q_1 жәнө **Q2** (**Q**$_1$>**Q**2) биіктігі h болатын қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

Ш е ш у і. Берілген қиық пирамиданы толық пирамидаға дейін толықтырамыз (483-сурет). χ — оның биіктігі болсын. Қиық пирамиданың көлемі толық екі пирамиданың көлемдерінің айырмасына тең: біреуінің — табан ауданы Q_1 және биіктігі x, екіншісінің — табан ауданы Q_2 және биіктігі $x — h$. Бүл пирамидалардың ұңсастығынан x-ті табамыз:

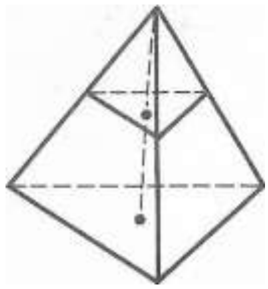
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2.$$

Бұдан $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. Қиық пирамиданың көлемі мынаған тең:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1}-Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3}h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right).$$

Сонымен, қиық пирамиданың көлемі келесідей формула бойынша есептеледі:



$$\boxed{V = \frac{1}{3}h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1 \cdot Q_2} + Q_2\right)}$$

мұндағы Q_1, Q_2 - қиық пирамида табандарының аудандары, h - пирамиданың биіктігі.

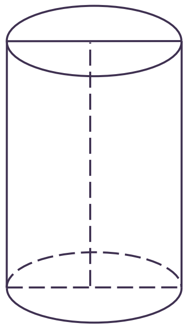
71. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың биіктігі 7 см-ге тең. Табандарының қабырғалары 10 см-ге және 2 см-ге тең. Пирамиданың көөөлемін табыңдар.

72. Үшбүрышты дұрыс қиық пирамида табандарының қабырғалары 4 дм және 1 дм. Бүйір қыры 2 дм. Пирамида көлемін табыңдар.

73. Үшбүрышты дұрыс қиық пирамида табандарының қабырғалары 2 см және 6 см. Бүйір жағы үлкен табанымен 60° бұрыш жасайды. Көлемін табыңдар.
74. Төртбұрышты дүрыс қиық пирамиданың табан қабырғалары 8 м және 2 м. Биіктігі 4 м. Толық бетін және көлемін табыңдар.
75. Биіктігі h, ал табандарының қабырғалары a және b болатын: 1) үшбұрышты; 2) төртбүрышты; 3) алтыбұрышты дұрыс қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

Сабақ: № 85. Цилиндр көлемі
Жоспары:
1. **Цилиндр көлемінің формуласы**
2. **Цилиндрдің көлеміне есептер**

Бақылау сұрақтары:



1. Цилиндр дегеніміз не?
2. Цилиндрдің табандары қандай фигуралар болып келеді?
3. Цилиндрдің биіктігі дегеніміз не?
4. Цилиндрдің жасаушысы дегеніміз не?
5. Цилиндрдің радиусы дегеніміз не?

Табанының радиусы $\boldsymbol{R}$**,** биіктігі $\boldsymbol{H}$ болатын цилиндрдің көлемін табайық:

$$\mathbf{V} = \mathbf{SH} = \boldsymbol{\pi}\mathrm{R}^2\ \mathbf{H}.$$

Цилиндрдің көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең болады.

Есептер:

1. Цилиндрдің табан ауданы 36π см², ал бүйір беті – 84π см². Цилиндрдің көлемін табу керек.
Шешуі:

$$S = \pi R^2$$
$$36\pi = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6cm$$
$$S_{b.b.} = 2\pi Rh \Rightarrow 84\pi = 2\pi \cdot 6 \cdot h \Rightarrow h = 7cm$$
$$V_{цилиндр} = S \cdot H = 36\pi \cdot 7 = 252\pi cm^3$$

Жауабы: 252π см³.

2. Диаметрі $4\sqrt{2}cm$, ал биіктігі 3см болатын цилиндрдің көлемін табу керек.

$$V_{цилиндр} = S \cdot H$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}cm$$

$$V_{цилиндр} = \pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = 24\pi cm^3$$

Жауабы: 24π $см^3$.

3. Аллюминий сымның диаметрі 4мм, массасы 6,8кг, ал тығыздығы 2,6г/ cm^3 . Сымның ұзындығын табу керек.

$$m = \rho \cdot V$$

$$6.8kg = 6800g$$

$$4mm = 0.4cm$$

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 0.4 = 0.2cm$$

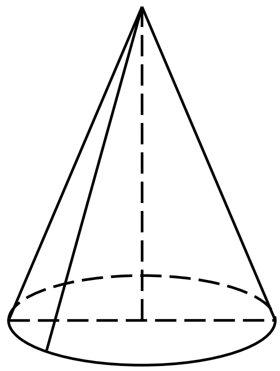
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{6800}{2.6} = 2615.4cm^3$$

$$V_{цилиндр} = S \cdot H \Rightarrow 2615.4 = \pi \cdot 0.2^2 \cdot h \Rightarrow$$

$$2615.4 = 0.1256 \cdot h \Rightarrow h = 20823.248cm = 208.23m$$

Жауабы: 208,23 м.

4. Цилиндр тәріздес цистернаға қанша тонна мұнай сыйяды, егер деонық диаметрі 18м, ал биіктігі 7м. Мұнай тығыздығы 0,85г/ cm^3



$$m = \rho \cdot V$$

$$V_{цилиндр} = S \cdot H = \pi \cdot 9^2 \cdot 7 = 567\pi = 1780.38m^3$$

$$0.85g/cm^3 = 850kg/m^3$$

$$m = \rho \cdot V = 850 \cdot 1780.38 = 1513323kg = 1513.323m$$

Жауабы: 1513,323 м.

1. 25 м мыс сымның массасы 100,7 г. Сымның диаметрін табыңдар (мыстың тығыздығы 8,94 г/$см^3$).
2. Бу қазанына су жіберетін насостың су қүятын екі цилиндрі бар. Цилиндрдің диаметрлері 80 мм, ал поршеннің жүріс жолы 150 мм. Егер әр поршень минутына 50 рет жүріс жасаса, насостың 1 сағаттағы өнімділігі неге тең?
3. Қабырғасының қалыңдығы 4 мм қорғасын түтіктің (қорғасынның тығыздығы 11,4 г/см'^{5}) ішкі диаметрі 13 мм. Осы түтіктің 25 м-нің массасы қандай?
16. Цилиндр тәрізді мұржаның диаметрі 65 см, биіктігі 18 м, Егер жапсарға 10% материал кететін болса, оны жасауға қанша қаңылтыр керек?
17. Жарты цилиндр тәрізді төле күмбезінің ұзындығы 6 м және диаметрі 5,8 м. Төленің толық бетін табыңдар.
18. Дөңгелек табақ металдан диаметрі 25 см және биіктігі 50 см цилиндр стақан штампталған. Штампталғанда табақ металдың ауданы өзгермейді деп ұйғарып, дөңгелек табақтың диаметрін табыңдар.
19. Цилиндр табанының ауданы Q-re, ал осьтік қимасының ауданы М-ге тең. Цилиндрдің толық бетінің ауданы неге тең?

Сабақ: № 86. Конус көлемі

Жоспары:

1. **Конустың көлемі**
2. **Конустың көлеміне есептер**

Бақылау сұрақтары:

6. Конус дегеніміз не?
7. Конустың табаны қандай фигура болып келеді?
8. Конустың биіктігі дегеніміз не?
9. Конустың жасаушысы дегеніміз не?
10. Конустың радиусы дегеніміз не?
11. Цилиндрдің көлемі қалай есептеледі?

Табанының радиусы ***R,*** биіктігі ***H*** болатын конустың көлемін табайық:

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}SH\ =\frac{1}{3}\pi}\mathrm{R}^2\ \mathbf{H}.$$

Конустың көлемі табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең болады.

Есептер:

5. Конустың табан ауданы 16π см^2, ал бүйір беті – 20π см^2. Конустың көлемін табу керек.

Шешуі:

$$S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}}=\pi R^2$$

$$16\pi=\pi R^2\Rightarrow R^2=16\Rightarrow R=4cm$$

$$S_{\acute{a}.\ddot{\imath}.}=\pi Rl\Rightarrow 20\pi=\pi\cdot 4\cdot l\Rightarrow l=5cm$$

$$h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3cm$$

$$V_{\hat{e}\hat{\imath}\acute{\imath}\acute{o}\tilde{n}}=\frac{1}{3}S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}}\cdot h=16\pi\cdot 3=48\pi cm^3$$

Жауабы: $48\pi cm^3$

6. Диаметрі $6cm$, ал жасаушысы 7см болатын конустың көлемін табу керек.

$$V_{\hat{e}\hat{\imath}\acute{\imath}\acute{o}\tilde{n}}=\frac{1}{3}S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}}\cdot h$$

$$R=\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}\cdot 6=3cm$$

$$h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}cm$$

$$V_{\hat{e}\hat{\imath}\acute{\imath}\acute{o}\tilde{n}}=\frac{1}{3}S_{\hat{\imath}\tilde{n}\acute{\imath}}\cdot h=9\pi\cdot 2\sqrt{10}=18\sqrt{10}\pi cm^3$$

Жауабы: $18\sqrt{10}\pi cm^3$

4. Ұсақ тастың үймесі конус пішіндес, оның табан радиусы 2 м, ал жасаушысы 2,5 м. Үйме тастың көлемін табыңдар.

5. Конустың осьтік қимасы ауданы 9 м^2 болатын тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш болып табылады. Конустың көлемін табыңдар.

11. Маяланған пішеннің пішіні төбесі конус болып келген цилиндр тәрізді. Оның табан радиусы 2,5 м, биіктігі 4 м және маяның цилиндр тәрізді бөлігінің биіктігі 2,2 м. Пішеннің тығыздығы 0,03 г/см^3 Маяның массасын анықтаңдар.

12. Биіктігі 0,18 м және табанының диаметрі 0,24 м конус тәрізді ыдысқа құйылған сұйық табанының диаметрі 0,1 м болатын цилиндр тәрізді ыдысқа қотарылды. Ыдыстағы сұйықтың деңгейі қандай биіктікте тұрады?

42. Биіктігі 3,5 м, табанының диаметрі 4 м конус тәрізді шатыр кенеппен жабылған. Шатырға қанша квадрат метр кенеп кеткен?

43. Мал азығын сүрлейтін мұнараның төбесі конус тәріздес. Төбенің биіктігі 2 м, мұнараның диаметрі 6 м. Төбенің бетін табыңдар.

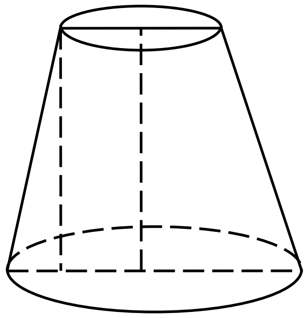
Сабақ: № 87. Қиық конус көлемі

Жоспары:

1. **Қиық конус көлемі**
2. **Қиық конустың көлеміне есептер**

Бақылау сұрақтары:

1. Қиық конус дегеніміз не?
2. Қиық конустың табаны қандай фигура болып келеді?
3. Қиық конустың биіктігі дегеніміз не?
4. Қиық конустың жасаушысы дегеніміз не?
5. Қиық конустың радиусы дегеніміз не?
6. Цилиндрдің көлемі қалай есептеледі?
7. Конустың көлемі қалай есептеледі?
8. Цилиндрдің осьтік қимасы қандай фигура болады?
9. Конустың және қиық конустың осьтік қималары қандай фигуралар болады?
10. Цилиндр мен қиық конустың арасында қандай айырмашылық бар?



Табанының радиустары ***R, r,*** биіктігі ***h*** болатын қиық конустың көлемін табайық:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}\mathrm{h}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{Rr} + \mathrm{r}^2)$$

Есептер:

16. Ұзындығы 15,5 м қарағай бөрененің екі басының диаметрлері 42 см және 25 см. Бөрененің көлемін оның орта көлденең қимасының ауданын ұзындығына көбейтіп есептегенде қандай қате жіберіледі?

Шешуі:

D=42cm=0.42m, R=0.42/2=0.21m
d=25cm=0.25m, r=0.25/2=0.125m

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi\mathrm{h}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{Rr} + \mathrm{r}^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 15.5(0.21^2 + 0.21 \cdot 0.125 + 0.125^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 15.5 \cdot (0.0441 + 0.02625 + 0.015625) = 1.3948m^3$$

$$R_{cp} = \frac{R + r}{2} = \frac{0.21 + 0.125}{2} = 0.1675m$$

$$V = \pi R^2 l = 3.14 \cdot 0.1675^2 \cdot 15.5 = 1.365498m^3$$

$$\Delta = 1.3948m^3 - 1.365498m^3 = 0.0293m^3$$

Жауабы: $\Delta = 0.0293m^3$

19. Табандарының радиустары 4 см және 22 см болатын қиық конусты биіктігі дәл осындай тең шамалы цилиндрге айналдыру қажет. Осы цилиндр табанының радиусы неге тең болады?

$$\mathbf{V}_{\text{қиық конус}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}\mathrm{h}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{Rr} + \mathrm{r}^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot h(4^2 + 4 \cdot 22 + 22^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \mathrm{h}(16 + 88 + 484) = 196\pi \cdot \mathrm{h}\ (m^3)$$

$$\mathbf{V}_{\text{цилиндр}} = \mathbf{SH} = \boldsymbol{\pi}\mathrm{R}^2\ \mathbf{H}$$

$$\mathbf{196\pi} \cdot \mathrm{h} = \pi\mathrm{R}^2 \cdot \mathrm{h}$$

$$\mathrm{R}^2 = \frac{196\pi \cdot \mathrm{h}}{\pi \cdot \mathrm{h}} = 196$$

$$\mathrm{R}^2 = 196$$

$$\mathrm{R} = 14\text{см}$$

Жауабы: $\mathrm{R} = 14\text{см}$

16. Бір жақ басының диаметрі 0,43 м, екінші басының диаметрі 0,036 м және жасаушысы 1,42 м болатын рупор жасау үшін қанша квадрат метр жез табақ қажет болады?

17. Егер конус тәрізді шелектің диаметрлері 25 см және 30 см, жасаушысы 27,5 см болса және 1 $м^2$-ге 150 г олифа кететін болса, сондай 100 шелектің сыртқы бетін сырлау үшін қанша олифа қажет болады?

Табанының радиусы ***R,*** биіктігі ***H*** болатын цилиндрдің көлемін табайық:

$$\mathbf{V} = \mathbf{SH} \ = \boldsymbol{\pi}\mathrm{R}^2\ \mathbf{H}.$$

Табанының радиусы ***R,*** биіктігі ***H*** болатын конустың көлемін табайық:

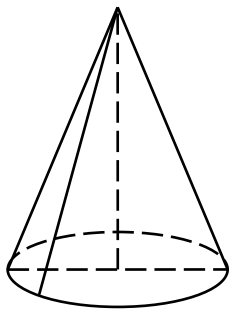
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{SH} \ = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}\mathrm{R}^2\ \mathbf{H}.$$

Табанының радиустары ***R, r,*** биіктігі ***h*** болатын қиық конустың көлемін табайық:

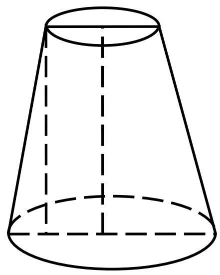
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}\mathrm{h}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{Rr} + \mathrm{r}^2)$$

Есептер:

17. Ұзындығы 15,5 м қарағай бөрененің екі басының диаметрлері 42 см және 25 см. Бөрененің көлемін оның орта көлденең қимасының ауданын ұзындығына көбейтіп есептегенде қандай қате (процентпен алғанда) жіберіледі?
18. Қиық конустың табандарының радиустары **R** және **r,** жасаушысы табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Көлемін табыңдар.
19. Қиық конустың осьтік қимасының ауданы табандары аудандарының айырмасына тең, ал табандарының радиус- тары **R** және **r**. Конустың көлемін табыңдар.
20. Табандарының радиустары 4 см және 22 см болатын қиық конусты биіктігі дәл осындай тең шамалы цилиндрге айналдыру қажет. Осы цилиндр табанының радиусы неге тең болады?
21. Табандарының берілген ***R*** және ***r*** радиустары бойынша қиық конус пен толық конустың көлемдерінің қатынасын анықтаңдар.



37. Радиусы 10 см шарды осінің бойымен цилиндр тәріздендіріп тескен. Тесіктің диаметрі 12 см. Дененің толық бетін табыңдар.
38. Цилиндр тәрізді мұржаның диаметрі 65 см, биіктігі 18 м, Егер жапсарға 10% материал кететін болса, оны жасауға қанша қаңылтыр керек?



Сабақ № 88. Шар және оның бөліктерінің көлемдері.

Жоспары:

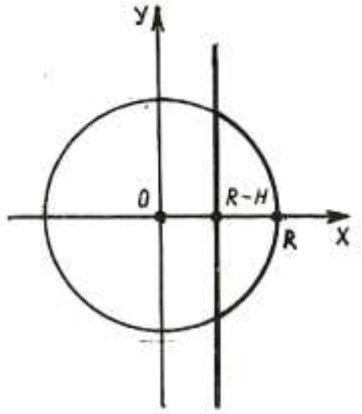
1. **Шар көлемі**
2. **Шар бөліктерінің көлемдері**

Айналу денелерінің көлемдері үшін осы табылған формуланы шардың көлемін есептеп шығару үшін қолданамыз.

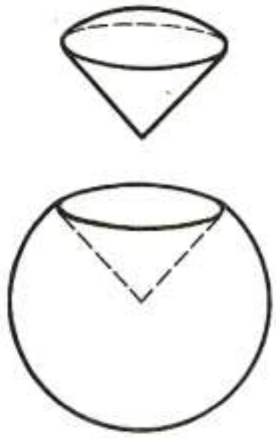
Шардың көлемі мына формуламен анықталады: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Шар сегменті деп шардың жазықтықпен қиылып түскен бөлігін айтады. Шар сегментінің көлеміне арналған формуланы шар көлемінің формуласы сияқты шығарып аламыз (493-сурет)

$$V=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-x^2)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-H}^{R}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$



493-сурет



494-сурет

мұндағы ***R*** — шардың радиусы, ал ***H*** — шар сегментінің биіктігі.

Шар секторы деп шар сегменті мен конустан төмендегідей жолмен алынатын денені айтады. Егер шар сегменті жарты шардан кіші болса, онда шар сегменті төбесі шардың центрін- де, табаны сегменттің табаны болып келетін конуспен толық- тырылады. Егер де сегмент жарты шардан үлкен болса, онда жоғарыда көрсетілген конусты одан алып тастайды (494- сурет). Шар секторының көлемін сәйкес сегмент пен конустың көлемдерін қосу немесе азайту арқылы шығарып алады. Шар секторының көлемі үшін мынадай формула алынады:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H,$$

мұндағы ***R*** — шардың радиусы, ал ***H*** — сәйкес шар сегментінің биіктігі.

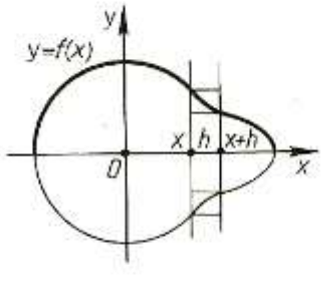
21. Реттеуіштің шойын шарының массасы 10 кг. Шардың диаметрін табыңдар (шойынның тығыздығы 7,2 г/см^3).
22. Диаметрлері 25 см және 35 см болатын екі шойын шарды бір шар етіп қайта құю керек. Жаңа шардың диаметрін табыңдар.
23. Массасы 1 кг кесек қорғасын бар. Осы кесектен диаметрі 1 см қанша шар құйып шығаруға болады? (Қорғасын- ның тығыздығы 11,4 г/см".)
24. Қуыс шардың сыртқы диаметрі 18 см. Қабырғасының қалыңдығы 3 см. Шар жасалған материалдың көлемін табыңдар.

Сабақ № 89. Геометриялық денелердің көлемдерін табуға есептер шығару.

Жоспары:

1. **Айналу денесі ұғымы**
2. **Айналу денелерінің көлемінің жалпы формуласы**

Ең қарапайым жағдайда ***айналу денесі*** деп қандай да бір түзуге (айналу осіне) перпендикуляр жазықтықтармен центрі осы түзуде жататын дөңгелектер бойымен қиылысатын денені айтады. Дөңгелек цилиндр, конус, шар айналу денелеріне мысалдар болып табылады. Айналу денелерінің көлемін есептеп шығару үшін форма табайық.Дененің осін χ осі ретінде алып, дененің осі арқылы жазықтық жүргізейік және декарттық х, у координаттарды енгізейік (491-сурет). ***xy*** жазықтығы дененің бетін *x* осі симметрия осі болып табылатын сызық бойымен қияды. $y = f(x)$ — осы сызықтың χ осінен жоғары орналасқан бөлігінің теңдеуі болсын.



491-сурет

Абсцисса осінің (х; 0) нүктесінен оған перпендикуляр жазықтық жүргізейік және дененің осы жазықтықтың сол жағында жатқан бөлігінің көлемін $V(x)$ арқылы белгілейік; $V(x)$ сонда х-тің функциясы болып табылады. $V(x+h)$ — $V(x)$ айырмасы χ осіне перпендикуляр, абсциссалары $(x+h)$ *және* x болатын нүктелерден өтетін екі жазықтық арасындағы қалыңдығы h дене қабатының көлемін білдіреді. $f(x)$ функциясының [x, $x+h$] кесіндісіндегі ең үлкен мәні — M, ең кіші мәні — m болсын. Сонда дененің қарастырылып отырған қабаты радиусы m_y биіктігі h цилиндрді қамтиды да, радиусы M, биіктігі сол h болатын цилиндрмен қамтылады (491-суретті қара). Сондықтан

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h)-V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

Биіктік h нөлге үмтылғанда соңғы теңсіздіктің сол лсақ және оң жақ бөліктері бір ғана $\pi f^2(x)$ шамасына ұмтылады. Бұл теңсіздіктің орта бөлігі h шамасы нөлге үмтылғанда $V(x)$ функциясының $V'(x)$ туындысына үмтылады. Демек,

$$V'(x) = \pi f^2(x).$$

Анализден белгілі формула бойынша

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx, \quad a < b.$$

Бұл формула дененің $x = a$ және $x = b$ параллель жазықтықтар арасындағы бөлігінің көлемін береді.

27. Шардың диаметріне перпендикуляр жазықтық оны 3 см жәнө 9 см бөліктерге бөледі. Шардың көлемі қандай бөліктерге бөлінеді? ·
28. Биіктігі шар диаметрінің 0,1-іне тең шар сегментінің көлемі шар көлемінің қандай бөлігін құрайды?
29. Тең екі шар бірінің центрі екіншісінің бетінде жататындай етіп орналастырылған. Шарлардың ортақ бөлігі көлемінін, бүтін шардың колеміне қатынасы қандай болады?
30. Шардың 30 см-ге тең диаметрі табанының радиусы 12 см-ге тең цилиндрдің осі болып табылады. Цилиндрдің ішін- дегі шар бөлігінің көлемін табыңдар.

Сабақ № 90.

Бақылау жұмысы

I нұсқа

1. Үшбұрышты дұрыс призманың бүйір қыры 3см, ал табан қабырғаларының ұзындықтары 2см. Призманың толық бетін табу керек.
2. Конустың табан ауданы $16\pi cm^2$, ал биіктігі 3см. Конустың толық бетін табу керек.
3. Табан қабырғалары 9см және 25см болатын төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың биіктігі 3см. Көлемін табыңдар.

II нұсқа

1. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың биіктігі 8см, ал табан қабырғалары 12см. Пирамиданың бүйір бетін табу керек.
2. Цилиндрдің бүйір беті $30\pi cm^2$, ал табан ауданы $25\pi cm^2$. Цилиндрдің жасаушысын табу керек.
3. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғалары 3см және 5см. Бүйір беті $32cm^2$. Көлемін табыңдар.

Бөлім X I. Ықтималдық теориясы мен математикалық статистика элементтері.

Сабақ № 91. Математикалық статистика элементтері.

Жоспар

1. **Ықтималдық теориясын мағынасын анықтау.**
2. **Математикалық статистика элементтері.**

Ықтималдылық Теориясы – кездейсоқ бір оқиғаның ықтималдығы бойынша онымен қандай да бір байланыста болатын басқа бір кездейсоқ оқиғаның ықтималдығын анықтауға мүмкіндік беретін математика білімі. Ықтималдылық теориясында кездейсоқ құбылыстардың заңдылығы зерттеледі. Кездейсоқ құбылыстарға анықталмағандық, күрделілік, көп себептілік қасиеттері тән. Сондықтан мұндай құбылыстарды зерттеу үшін арнайы әдістер құрылады. Ол әдістер мен тәсілдер Ықтималдылық теориясында жасалынады.

Белгілі бір жағдайда орындалатын немесе орындалмайтын құбылыстарды кездейсоқ оқиғалар деп атайды. Берілген шарт бойынша міндетті түрде орындалатын оқиға ақиқат оқиға деп аталады. Ал берілген шарт бойынша орындалмайтын оқиғаны мүмкін емес оқиға деп атайды.

Келесі оқиғалардың қайсысы «кездейсоқ оқиға», «мүмкін емес оқиға», «ақиқат оқиға» екенін анықтайық..

- а, к, и, т, а, м, е, т, а, м әріптерін кездейсоқ тергенде, «математика» сөзінің құрылуы.
- Сенбі күні таңертең №17 троллейбустың кешігуі;
- Тиынды бер рет лақтырғанда, елтаңба бетінің түсуі;
- Ойын кубигін бір рет лақтырғанда, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сандарының біреуінің түсуі;
- Үш рет ойын сүйегін лақтырғанда , 19 ұпайдың болуы.
- Кешкі серуен кезінде үш таныс адамның кездесуі.

Ықтималдық теориясы дегеніміз- кездейсоқ оқиғалардың орындалуының заңдылығын зерттейтін математиканың бөлімі.

Ықтималдықтар теориясының негізінде «математикалық статистика» ғылымы пайда болды. Мат. Статистиканы бақылау нәтижелерін қорытындылайтын әдістерді зерттейтін ғылым деп есептеуге болады. Ол қызметтің барлық салаларында маңызды роль атқарады.

Күнделікті өмірде орындалатын да, орындалмайтын да *оқиғалар* жиі кездеседі. Таңертең тұрып терезеден далаға қарасақ, далада күн ашық болуы да, бұлтты болуы да, жаңбыр жауы да, қар жауы да мүмкін. Бұлардың бәрінің орындалу мүмкіндіктері тең. Мұнда бірі орындалса, басқалары орындалмайтын жағдай бар. Және олар кездейсоқ оқиға болып табылады. Асықты лақтырғанда оның бүк, шік, тәйкі немесе алшы жағы жоғары қарап түсуі де – *кездейсоқ оқиға*. Сонымен, кездейсоқ оқиға деп белгілі бір тұрақты жағдайда орындалуы мүмкін немесе орындалмауы мүмкін оқиғаны айтады. Мысал 1: Асықты лақтырып ойнағанда, ол асықтың бүк жағы жоғары қарап немесе шік жағы жоғары қарап, әлде болмаса, тәйкі жағы немесе алшы жағы жоғары қарап түсуі мүмкін. Мұнда бірі орындалса, басқалары орындалмайтын жағдай бар. Асықты лақтырғанда оның бүк, шік, тәйкі немесе алшы жағы жоғары қарап түсуі кездейсоқ оқиға болып табылады.

Біз қадағалап отырған нәтиже қанша рет шығатындығын анықтау үшін бірнеше рет бір-біріне тәуелсіз тәжірибелер жүргізіледі. Тәжірибе деп нәтижесін байқауға болатын объектіні түсінеміз. Мысалы: емтихан тапсыру, мылтықтан оқ ату, ойын тасын лақтыру, т.б.

Негізі тәжірибеге дейін бізге қолайлы оқиғаның орындалатынын, не болмаса орындалмайтынын анықтау мүмкін емес, оны тек тәжірибе соңында ғана көреміз. Біз ықтималдықтар теориясында кездейсоқ тәжірибеге қатысты барлық оқиғаларды кездейсоқ оқиғалар дейміз және кездейсоқ оқиға болып мына оқиғалар саналады:

1. жалған — ешқашан орындалуы мүмкін емес оқиға,

2. айқын — әрбір тәжірибе барысында орындалатын оқиға.

Мысал 2: Жұмыртқаны пісіргенде пайда болатын оқиғаларды қарастырайық:

А= жұмыртқаның пісуі ;

В= жұмыртқаның піспеуі ;

С= піскен жұмырқадан балапанның шығуы

А, В оқиғалары – кездейсоқ оқиғалар, яғни айқын оқиғалар, С оқиғасы – жалған оқиға.

Сабақ № 92. Кездейсоқ оқиғаларға қолданалатын амалдар.
Жоспар.
1.Тәуелсіз оқиғалар.
2.Шартты ықтималдық.
3.Ықтималдықтың көбейту ережесі.

Бір тәжірибеден туындайтын кез келген А және В оқиғаларын қарастырайық. Тәжірибе нәтижесінде А оқиғасы пайда болды дейік. Онда В оқиғасы туралы не айтуға болады?
Мысал 1: А және В үйлесімсіз және тәжірибе нәтижесінде А оқиғасы пайда болсын. Эйлер диаграммасын құрайық.
В оқиғасы орындалған жоқ.

Мысал 2: , тәжірибе нәтижесінде А оқиғасы орындалсын. В оқиғасы туралы не айта аламыз? Эйлер диаграммасын құрайық
В оқиғасы орындалды.

Мысал 3: Екі асық лақтырылсын. Пайда болатын оқиғалар:
А=(бірінші асықтың бүк жағы түседі);
В=(екінші асықтың шік жағы түседі);
А оқиғасының орындалғаны анық болса, В оқиғасы туралы не айтуға болады? Бұл жерде бірінші асықтың тәжірибесіндегі нәтиже екінші асықтың тәжірибесіндегі нәтижеге әсер

ете алмайды. Демек, А және В оқиғалары бір-бірінен тәуелсіз.
Анықтама: Егер А оқиғасының орындалуы немесе орындалмауы В оқиғасының орындалуына немесе орындалмауына әсер етпейтін болса, онда бұл А және В оқиғалары өзара тәуелсіз деп аталады.

Мысал 4: 1-ден 10-ға дейінгі натурал сандар арасынан кез келген бір сан таңдап алынады. Пайда болатын оқиғаларды қарастырайық:
А=(алынған сан 2-ге бөлінеді);
В=(алынған сан 3-ке бөлінеді);
Қарап тұрсақ, санның 2-ге бөлінгіштігінің 3-ке бөлінгіштігіне еш қатысы жоқ сияқты. Дегенменде, олар бір-біріне тәуелді.
Алдымен В оқиғасының ықтималдығын анықтайық. Барлық он сан ішінен 3-ке тек үш сан – 3, 6, 9 бөлінеді. Онда Р(В)= .
Алынған сан 2-ге бөлінеді дейік. Яғни А оқиғасы орындалды, бірақ алынған сан –белгісіз. Бұл алынған санның 3-ке бөліну ықтималдығы қандай? Алынған санның 2-ге бөлінетіндігін дәл білгендіктен, ол сан мына бес сандардың біреуі болуы мүмкін: 2, 4, 6, 8, 10. Бұл сандардың ішінен 3-ке тек 6 ғана бөлінеді.
А және В оқиғаларының қиылысуын қарастырайық:
1) бірінші мысалдағыдай, олардың қиылысуы бос болса, онда В орындалмайды.
2) екінші мысалдағыдай, олардың қиылысуы барлық А-мен беттессе, онда В қатаң орындалады, себебі қалған нәтижелер В оқиғасына қолайлы.
3) төртінші мысалдағыдай, олардың қиылысуы бос емес және беттеспесе, онда В оқиғасының ықтималдығын А В-ның нәтижелер санын А-ның нәтижелер санына қатынасы түрінде анықтаған дұрыс. Егер А оқиғасы орындалса, онда бұл ықтималдықты В оқиғасының шартты ықтималдығы деп атайды:

Егер В оқиғасының ықтималдығы А оқиғасының орындалуы немесе орындалмауынан өзгермесе, яғни оның шартты ықтималдығы болса, онда В оқиғасы А оқиғасынан тәуелсіз.
$P(AB)= P(A)\cdot P_A(B)$ Ал соңғы теңдік ықтималдықтың көбейту ережесі деп аталады.
Мысал 5: Дидарда үйге кіру үшін 3 кілт бар. Қараңғыда ол есікке кілтті кездейсоқ әдіспен таңдап, аша бастайды. Әр есікті ашуға 5 секундтан уақыт кетеді. Оның 15 секундта барлық есіктерді ашу ықтималдығын табыңдар.
А – “барлық есіктердің ашылуы”. Бұны қарапайым оқиғаларға бөлейік. В – “бірінші есік ашылды“, С – “ екінші есік ашылды“, ал D – “ үшінші есік ашылды“. Онда А=ВСD, демек Р(А)=Р(ВСD).
Үйлесімсіз оқиғалар. Ықтималдықтың қосу ережесі.
Анықтама: Егер А және В оқиғалары бір кездейсоқ тәжірибе нәтижесінде қатар орындалса, онда олар үйлесімді оқиғалар деп аталады.
Анықтама: Егер А және В оқиғалары бір кездейсоқ тәжірибе нәтижесінде қатар орындала алмаса, онда олар үйлесімсіз оқиғалар деп аталады.
Мысал 1: «Далада жаңбыр жауып тұр», «аспанда бір де бұлт жоқ» - үйлесімсіз оқиғалар.
Мысал 2: Айдын мен Марат шахмат ойнады. А- «Айдын жеңді», В – «Марат жеңілді» - үйлесімді оқиғалар.
Мысал 3: Келесі А және В оқиғалары үйлесімсіз:
а) тиынды лақтырғанда:

А=(елтаңба жағының түсуі);

В=(цифр жағының түсуі);
б) Жәшіктен екі алма алынды:
А=(екеуінің де қызыл болуы);
В=(екеуінің де көк болуы);
Ескерту: Үйлесімсіз оқиғалар жайлы айтқанда, олардың бір тәжірибе аясында

қарастырылатынын ескерген жөн.
Егер A және B оқиғалары үйлесімсіз болса, онда немесе A, немесе B оқиғасы орындалады. Бұл деп отырғанымыз
P(A+B)=P(A)+P(B).
Бұл теңдік үйлесімсіз оқиғаларға арналған ықтималдықтың қосу ережесі деп аталады. Ол кездейсоқ оқиғаның кез келген санына байланысты өзгереді:
P (A)=m/n,

m – A оқиғасына қолайлы барлық мүмкін қарапайым оқиғалар саны, k – B оқиғасына барлық мүмкін қарапайым оқиғалар саны, n – барлық мүмкін қарапайым оқиғалар саны болсын. Онда,

Мысал 4: Бірінші жәшікте 12 түрлі-түсті шарлар, екінші жәшікте 10 түрлі-түсті шарлар бар. Кездейсоқ бір жәшіктен бір шар алынды. Дәл осылай шарды неше әдіспен таңдап алуға болады?
Бірінші жәшіктен шарды 12 әдіспен, екінші жәшіктен 10 әдіспен таңдап алуға болады. Демек, 12+10=22.
Ал егер A және в оқиғалары қиылысса, яғни үйлесімді болса ықтималдықтың қосу ережесі қандай болады? Онда мынадай күрделі ережені жазайық:
Дәлелдеуі оңай:
P(A)+P(B) қосындысы – A және B оқиғаларының элементтерін жекежеке есептеп қосқанға тең.
Есеп шығару жолы:
Қорапшада К қара және Н ақ шар бар. Кез – келген тәсілмен М шарды алды. Олардың арасында:

а) Р ақ шар;

б) Р- дан аз ақ шар;

в) кемінде бір ақ шар – болуының ықтималдығын тап. К, Н, М, Р мәндері кестеде берілген:

Нұсқа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
К	5	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	8	6	4	8	5
Н	6	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
М	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
Р	2	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2	3	3	3	2	4

Нұсқа	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
К	7	5	6	5	6	6	6	8	6	5	6	5	6	6	4
Н	4	7	5	7	7	8	5	6	7	7	7	7	8	7	7
М	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4
Р	3	3	2	4	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2

0-нұсқаның **шешуі:**

Қорапшада 5 қара, 6 ақ шар бар. Кез – келген ретпен 4 шар алды. Алынған шарлар ішінде:

а) 2 ақ шар;

б) 2 ақ шардан кем;

в) кемінде бір ақ шар – болуының ықтималдығын табу керек.

Тәжірибе ретінде кез – келген 4 шардың алынуы болады. 11 шардан әр – түрлі тәсілмен 4 шарды теру – элементар оқиға болады. Олардың саны:

$$n = C_{11}^{4} = \frac{8*9*10*11}{1*2*3*4} = 330.$$

а) A_1 – алынған шарлардың 2-ақ. Демек, алынған шарлардың 2-ақ, 2-қара. Көбейту формуласы бойынша:

$$m = C_6^2 * C_5^2 = \frac{5*6}{1*2} * \frac{4*5}{1*2} = 15*10 = 150. \ P(A_1) = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}.$$

б) A_2 – алынған шарлардың ішінде ақ шар саны 2-ден кем. Бұл оқиға екі үйлесімсіз оқиғалардан тұрады:

B_1 – алынған шарлардың ішінде тек 1-ақ, 3-қара шар бар,

B_2 – алынған шарлар ішінде ақ шар жоқ, барлық алынған шарлар түсі – қара.

$$A_2 = B_1 \cup B_2.$$

B_1 мен B_2 үйлесімсіз болғандықтан, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_3);$$

$$m_1 = C_6^1 * C_5^3 = \frac{6*4*5}{1*1*2} = 60, m_2 = C_5^4 = 5;$$

$$P(B_1) = \frac{60}{330}, P(B_2) = \frac{5}{330};$$

$$P(A_2) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) A_3 – алынған шарлардың кемінде біреуі – ақ. Бұл шартты келесі терулер қанағаттандырады: 1-ақ және 3-қара (B_1), 2-ақ және 2-қара (B_2), 3-ақ және 1-қара (B_3), 4-ақ (B_4). Бұдан:

$$A_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_{4.}$$

A_3 – оқиғасында «кемінде біреуі» деп анықталған, мұның тікелей шешуі күрделі есептеулерге келіп тіреледі. Сол себепті, алдымен оның қарама – қарсы оқиғасының ықтималдығын тауып, формула бойынша ізделінді ықтималдықты табу жеңіл.

A_3 – алынған шарлардың бірде – біреуі ақ емес. Бұл жағдайда:

$$m = C_5^4 = 5, P(\overline{A_3}) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66};$$

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}.$$

Жауабы: $P(A_1) = \frac{5}{11}, P(A_2) = \frac{13}{66}, P(A_3) = \frac{65}{66}.$

Сабақ № 93. Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы.
1.Оқиға ықтималдығының классикалық анықтамасы
2. Есепе шығару

Ықтималдылық Теориясы – кездейсоқ бір оқиғаның ықтималдығы бойынша онымен қандай да бір байланыста болатын басқа бір кездейсоқ оқиғаның ықтималдығын анықтауға мүмкіндік беретін математика білімі. Ықтималдылық теориясында кездейсоқ құбылыстардың заңдылығы зерттеледі. Кездейсоқ құбылыстарға анықталмағандық, күрделілік, көп себептілік қасиеттері тән. Сондықтан мұндай құбылыстарды зерттеу үшін арнайы әдістер құрылады. Ол әдістер мен тәсілдер Ықтималдылық теориясында жасалынады.

Белгілі бір жағдайда орындалатын немесе орындалмайтын құбылыстарды кездейсоқ оқиғалар деп атайды. Берілген шарт бойынша міндетті түрде орындалатын оқиға ақиқат оқиға деп аталады. Ал берілген шарт бойынша орындалмайтын оқиғаны мүмкін емес оқиға деп атайды.

Есеп:

Қорапшада К қара және ақ шарлар бар. Қорапшаға L ақ шарды қосты. Осыдан кейін қорапшадан кездейсоқ М шарды алады. Қораптағы шарлардың бастапқы құрамының шығу ықтималдығы бірдей деп алып, алынған шарлардың ақ болуының ықтималдығын табыңдар.

К, L, M мәндері кестеде берілген:

Нұсқа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
К	4	3	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3
L	2	4	3	2	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4
M	3	4	4	3	4	2	3	2	3	4	2	3	4	5	2	3

Нұсқа	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
К	3	3	3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
L	4	5	5	5	5	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
M	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3

0-нұсқаның **шешуі:**

Қорапшада 4 қара және ақ шарлар бар. Қорапшаға 2 ақ шарды қосты. Осыдан кейін қорапшадан кездейсоқ 3 шарды алады. Қораптағы шарлардың бастапқы құрамының шығу ықтималдығы бірдей деп алып, алынған шарлардың ақ болуының ықтималдығын табыңдар.

Бұл жағдайда екі сынақ орынды: алғашында қорапшаның бастапқы құрамы беріліп, одан кездейсоқ 3 шар алынады. Сонымен қатар, екінші сынақ нәтижесі біріншіге тәуелді. Сондықтан, толық ықтималдықтың формуласын пайдаланамыз.

А оқиғасы – кездейсоқ 3 шарды алу. Бұл оқиғаның ықтималдығы – қорапшаның бастапқы құрамына тәуелді.

Мынадай оқиғаларды қарастырайық:

B_1 – қорапшада 4 ақ шар болды;

B_2 – қорапшада 3 ақ шар және 1 қара болды;

B_3 – қорапшада 2 ақ шар және 2 қара болды;

B_4 – қорапшада 1 ақ шар және 3 қара болды;

B_5 – қорапшада 4 қара шар болды.

Толық ықтималдықтың формуласын мына түрде пайдаланамыз:

$$P(A) = P(\frac{A}{B_1}) * P(B_1) + P(\frac{A}{B_2}) * P(B_2) + P(\frac{A_1}{B_3}) * P(B_3) + P(\frac{A}{B_4}) * P(B_4) + P(\frac{A}{B_5}) * P(B_5).$$

B_1, B_2 , B_3, B_4 , B_5 оқиғалары - оқиғалардың толық системасын құрайды. Демек, оның қосындысы

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 = \Omega.$$

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1$$

Берілген шарт бойынша бұл ықтималдықтар тең. Демек:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{5}.$$

Элементар оқиғалар саны:

$$n = C_6^3 = \frac{4*5*6}{1*2*3} = 20.$$

А оқиғасының әр – түрлі жағдайлардағы шартты ықтималдығын табайық:

Егер $B_1 : m_1 = C_6^3 = 20, P(\frac{A}{B_1}) = \frac{20}{20} = 1.$

Егер $B_2 : m_2 = C_5^3 = \frac{4*5}{1*2} = 10, P(\frac{A}{B_2}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$

Егер $B_3 : m_3 = C_4^3 = 4, P(\frac{A}{B_3}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$

Егер $B_4 : m_4 = C_3^3 = 1, P(\frac{A}{B_4}) = \frac{1}{20} = .$

Егер $B_5 : m_5 = 0, P(\frac{A}{B_5}) = 0.$

$$P(A) = 1 * \frac{1}{5} + \frac{1}{2} * \frac{1}{5} * \frac{1}{5} + \frac{1}{20} * \frac{1}{5} + 0 * \frac{1}{5} = \frac{1}{5} * (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}) = \frac{1}{5} * \frac{20 + 10 + 4 + 1}{20} = \frac{1}{5} * \frac{35}{20} = \frac{7}{20}.$$

Жауабы: $P(A) = \frac{7}{20}.$

Сабақ № 94. Вариативтік қатар.
1.КЕЗДЕЙСОҚ ШАМА.
2.ТАҢДАУ ӘДІСТЕРІНІҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ
Кездейсоқ шама.

Ықтималдықтар теориясындағы маңызды ұғымдардың бірі – **кездейсоқ шама**. Ендеше келесі мысалға көңіл бөлейік:
1) Қалалық көлік қозғалысын бақылауда бір сағат ішінде кездейсоқ қиылыстан өтетін машиналар саны – кездейсоқ мән қабылдайды.
2) Хаттар санағында кездейсоқ пошта бөліміне әр кун сайын түсетін хаттар саны - әр түрлі кездейсоқ мән қабылдайды.
Бұл мысалдар мазмұны бойынша әр түрлі, бірақ олардың ортақ мағынасы бар:
1) Әр мысалда кездейсоқ оқиғаны бейнелейтін шама туралы айтылады.
2) Бұр әрбір шама кездейсоқ тәжірибе нәтижесіндегі сәйкес мән қабылдайды.
Анықтама:
Алдын ала белгісіз, тек тәжірибе нәтижесінде анықталатын бір мәнді шаманы кездейсоқ шама деп атайды.

Кездейсоқ шама кездейсоқ оқиғамен тығыз байланысты. Егер кездейсоқ оқиға тәжірибенің сапалық сипаттамасы болса, ал кездейсоқ шама оның сандық сипаттамасы береді.
Мына мысалдарға назар аударайық:

1) Оқты 4 рет атқандағы дәл тигізу саны;
2) Ұялы телефонға бір күнде түскен хаттар саны;
3) Қаңтар айындағы қалаға жауған қардың мөлшері.

Бұл арада кездейсоқ шамалар алдын-ала көрсетілген жеке тиянақты мәндерді қабылдайды.
Анықтама: Мәндері жеке дара тиянақты сандар болатын кездейсоқ шаманы дискретті кездейсоқ шама деп атайды.
Басқа типті кездейсоқ шамалар да бар. Мысалы:
1) нысанаға атқанда тигізген нүктенің абсциссасы;

2) белгілі биіктікке көтерілгенде ұшатын аппараттың жылдамдығы;
3) денені аналитикалық таразымен өлшегенде кететін қателік;
4) кездейсоқ алынған дәннің салмағы.
Берілген кездейсоқ шаманың мүмкін болатын мәндері бір-бірінен алшақ емес. Олар үзіліссіз шеткі нүктелері бар, ал кейде анықталмаған қандай да бір сандық аралықты толтырады.

Анықтама: Мәндері үзіліссіз белгілі бір [a; b] кесіндісінде (мұндағы a < b, a және b тиянақты нақты сандар) орналасқан кездейсоқ шаманы үзіліссіз кездейсоқ шама деп атайды.
x1, x2,..., xn мәндері болатын Х дискретті шамасын қарастырайық. Әрбір мәннің болуы мүмкін, бірақ ақиқат емес. Х кездейсоқ шамасы x1, x2,..., xn мәндері қандай да бір p1, p2, ...,рп ықтималдықтарын қабылдайды.
Анықтама***: Дискретті кездейсоқ шаманың*** мүмкін болатын мәндері және олардың ықтималдықтарының арасындағы сәйкестік берілген кездейсоқ шаманың таралу заңдылығы деп аталады.

Дискретті X кездейсок шамасының таралу заңдылығын кестемен берген ыңғайлы: X x1 x2 ... xn

p p1 p2 … pn

Кестенің бірінші жолында кездейсоқ шаманың барлык мүмкін болатын мәндері, ал екінші жолында олардың ыктималдықтары көрсетілген.
Практикада кездейсоқ шаманы сипаттау үшін кейбір сандық параметрлерді, мысалы, кездейсок шаманың мүмкін болатын мәндер жиынында шоғырланатын қандай да бір орта мән және орта мәнге байланысты олардың орналасуын сипаттайтын қандай да бір санды анықтаса жеткілікті. Осындай ұғымның бірі — математикалық күтім.
Мысал 1: 100 лотерея билеті шығарылған. Оның 40 билеті иесіне 50 теңгеден, 10 билеті 250 теңгеден, 5 билеті 500 теңгеден ұтыс әкеледі, ал калған билеттер ұтыссыз. Бір билетке қандай орташа ұтыс сәйкес келеді?
Шешуі. Х кездейсоқ шамасының мәндері0; 50; 250;500теңге десек, олардың ұтыс ыктималдықтары сәйкесінше —болады.
Мына кестеде оқиғаның таралу заңдылығы берілген:

X	0	50	250	500
p	0,45	0,4	0,1	0,05

Мысалы, қандай да бір ойыншы барлық 100 билетті сатып алса, онда ол 7000 теңге ұтар еді. Ал бір билеттің орташа ұтысы 70 теңге болады (өйткені 7000 : 100 = 70).
Сонда (0 • 45 + 50 • 40 + 250 • 10 + 500 • 5) : 100 = 0 • 0,45 + + 50 • 0,4 + 250 • 0,1 + 500 • 0,05.
Жауабы: 70 теңге.
1-мысалдағы соңғы теңдіктің оң жағында тұрған өрнек кездейсоқ шама мәндерінің сәйкес ықтималдықтарына көбейтінділерінің қосындысын береді.
Анықтама: Х кездейсоқ шамасы мәндерінің сәйкес ықтималдық мәндеріне көбейтінділерінің қосындысын Х кездейсоқ шамасының математикалық күтімі деп атайды.
Математикалық күтімнің белгіленуі: M(X).
Анықтама бойынша математикалық күтім есептеу формуласы:
M(X) = xI + x2p2 + ... + xп-1 pn-1 + xпрп. (1)
Мысал 2: Машина жасауда керекті тетікті дайындау үшін 1, 2, 3, 4, 5 үлгі қолданылады. Ол үлгілердің ықтималдығы мына кестеде берілген:

X	1	2	3	4	5
p	0,2	0,4	0,7	0,5	0,1

10 машина жасауда қолданылатын үлгілер сандарының орташа мәні қандай болады? Шешуі. Алдымен бір машинаға қажетті орта мәнді анықтаймыз. Содан кейін қорытындыны 10-ға көбейтеміз.
M(X) = 1 • 0,2 + 0,4 + 3 • 0,7 + 4 • 0,5 + 5 • 0,1 = 5,6.
Сонда 5,5 • 10 = 56. Жауабы: 56.
Математикалық күтімнің қасиеттері:
1)егер C — тұрақты болса, онда
M(C) = C, M(CX) = CM(X);
2) егер X, Y,Z кездейсоқ шамалар болса, онда M(X+ Y + 2) = M(X) + M(Y) + M(2)
Кездейсоқ шама мәнінің математикалық күтімге қатысты қандай мөлшерде шашырай орналасуының сандық сипаттамасын беретін ұғымдардың бірі — дисперсия. Бұл ұғымның анықтамасын берместен бұрын ауытқудың анықтамасын берейік.
Анықтама: X кездейсоқ шамасымен M(X) математикалық күтімнің айырымы, яғни X-M(X) ауытқу деп аталады,
X- M(X) ауытқуы мен оның квадраты (X - M(X))2 кездейсоқ шамалар болып табылады.
Енді X кездейсоқ оқиғасы дисперсиясының анықтамасын берейік.
Анықтама: Ауытқудың екінші дәрежесінің математикалық күтімі X кездейсоқ шамасының дисперсиясы деп аталады.
Дисперсияның белгіленуі B(X).
Анықтама бойынша дисперсияның формуласы:
D(X)= M[X-M(X)]2
Дисперсияның қасиеттері:
1) егер C тұракты болса, онда
D(X) = 0;
D(CX) = C2D(X);
2) D(X) = M(X2) – M2(X);
3) X және Y кездейсоқ шамалар болса, онда
D(X+Y) =D)(X) + D(Y).
Математикалық күтімнің қасиеттерін қолданып, (2) және (3) формулаларының мәндес екенін дәлелдеуге болады.
Мысал 3. Дискретті кездейсоқ шама мына таралу заңдылығымен берілген:

X 0 1 2 3 4

p 0,2 0,4 0,3 0,08 0,02

Кездейсоқ шаманың дисперсиясын табыңдар.
Шешуі. Алдымен математикалық күтімді M(X), содан кейін M(X2) есептейміз:
M(X) = 0 • 0,2 + 1 • 0,4 + 2 • 0,3 + 3 • 0,08 + 4 • 0,02 = 1,32, MCX2) = 0 • 0,2 + 1 • 0,4 + 4 • 0,3 + 9 • 0,08 + 16 • 0,02 = 2,64. (3) формула бойынша: D(X) = 2,64 - 1,7424 = 0,8976.
Жауабы: 0,8976.

ӘДЕБИЕТТЕР ЖӘНЕ ОҚЫТУ ҚҰРАЛДАРЫ

Негізгі:

1. А. Е. Абылкасымова және т.б. Алгебра және анализ бастамалары, 10- 11 сынып, жаратылыстану- математикалық бағыты.2008,2009ж.ж.
2. А.В. Погорелов. Геометрия. 7-11 класс 1991ж.
3. Гусев А., Қағазбаева,... Геометрия 10 сынып. жаратылыстану- математикалық бағыты. 2009ж.
4. Математика для техникумов. Алгебра и начало анализа. (под. ред. Г.Н. Яковлева. I часть М. 1987г).
5. Математика для техникумов. Алгебра и начало анализа.(под. ред. Г.Н. Яковлева. II часть М. 1988г).
6. Математика для техникумов. Геометрия.(под. ред. Г.Н. Яковлева. М. 1987г).
7. Апанасов П.Т., Орлов М.И. Сборник задач по математике. М. 1987г.